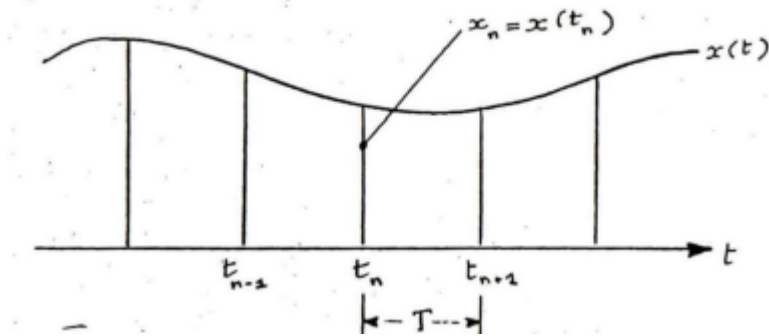


Dimostrare e descrivere il teorema del campionamento nel dominio dei tempi

libro 2.9, pdf:70

Teorema del campionamento (dominio dei tempi) — versione compatta in italiano



Definizioni.

Sia $x(t)$ un segnale tempo-continuo. Campioniamo $x(t)$ agli istanti

$$t_n = nT, \quad n \in \mathbb{Z},$$

dove $T > 0$ è l'intervallo di campionamento, $f_0 = \frac{1}{T}$ è la frequenza di campionamento e

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

è la pulsazione di campionamento. I valori campionati sono $x_n = x(t_n) = x(nT)$.

Segnale campionato (treno d'impulsi).

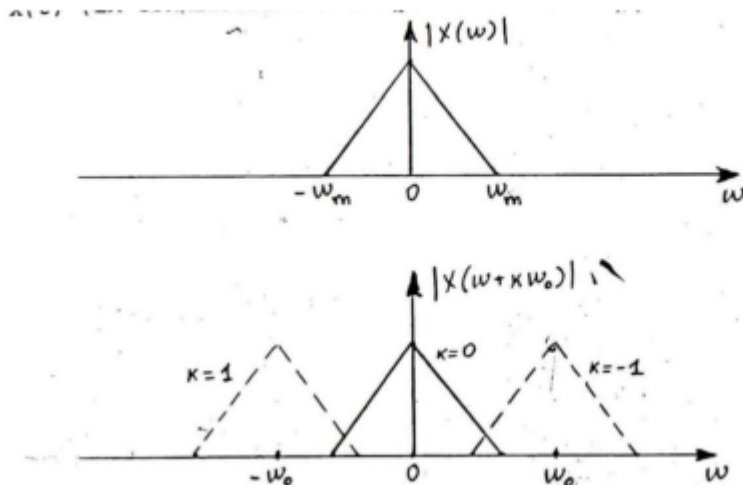
Il segnale campionato si modella come

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT).$$

Trasformata di Fourier.

Se $X(\omega)$ è la trasformata di Fourier di $x(t)$, allora la trasformata del segnale campionato è

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega - k\omega_0) \quad (\text{replicazione periodica dello spettro con passo } \omega_0).$$



Ipotesi di banda limitata (passa-basso).

Supponiamo che $x(t)$ sia a banda limitata:

$$X(\omega) = 0 \quad \text{per} \quad |\omega| > \omega_m,$$

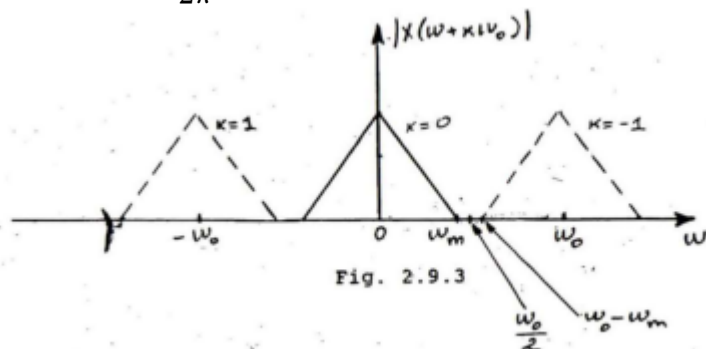
con ω_m la massima pulsazione significativa del segnale.

Condizione di Nyquist (no aliasing).

Per evitare la sovrapposizione (aliasing) tra le repliche spettrali in $X_s(\omega)$ è sufficiente che

$$\omega_0 > 2\omega_m \quad \iff \quad f_0 > 2f_{\max},$$

dove $f_{\max} = \frac{\omega_m}{2\pi}$. In tal caso le bande $X(\omega - k\omega_0)$ rimangono disgiunte.



Teorema del campionamento (Shannon–Nyquist).

Se $x(t)$ è a banda limitata a ω_m e la frequenza di campionamento soddisfa $\omega_0 > 2\omega_m$, allora $x(t)$ è univocamente determinata dai campioni $\{x(nT)\}$ ed è ricostruibile (idealmente) tramite un filtro passa-basso ideale (taglio ω_c con $\omega_m < \omega_c < \omega_0 - \omega_m$), ovvero mediante l'interpolazione sinc:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right),$$

dove $\operatorname{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$.

Commento operativo.

- La campionatura genera repliche di $X(\omega)$ centrate in $k\omega_0$

- La condizione $\omega_0 > 2\omega_m$ garantisce bande non sovrapposte \Rightarrow ricostruzione perfetta (in assenza di quantizzazione/rumore) con LP ideale.
- Se $\omega_0 \leq 2\omega_m$ si ha aliasing: le repliche si sovrappongono e $x(t)$ non è più ricostruibile univocamente dai soli campioni.

Bignami

Teorema del campionamento (dominio dei tempi)

scrivo che un segnale campionato è un treno di impulsi, poi lo trasformo con fourier e dico che per convoluzione è $X(\omega - k \cdot \omega_0)$ poi dico che il campionamento è giusto se $\omega_0 > 2\omega_m$ secondo il teorema di Shannon-Nyquist (e lo enuncio dicendo $x(t)$ è esattamente uguale alla sommatoria infinita di tutti i pezzettini campionati.

1) Segnale campionato

Il campionamento consiste nel moltiplicare $x(t)$ per un treno di impulsi:

$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

dove T è l'intervallo di campionamento e $f_0 = 1/T$ è la frequenza di campionamento.

2) Trasformata di Fourier

Il treno di impulsi in tempo diventa un treno di impulsi in frequenza:

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \right\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Per la convoluzione nel dominio delle frequenze:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega - k\omega_0)$$

\rightarrow lo spettro del segnale campionato è una **ripetizione periodica** dello spettro originale $X(\omega)$ ogni ω_0 rad/s.

3) Condizione di Nyquist–Shannon (no aliasing)

Affinché le repliche spettrali non si sovrappongano serve che:

$$\omega_0 > 2\omega_m \iff f_0 > 2f_{\max}$$

dove ω_m è la massima pulsazione del segnale originale.

4) Enunciato del teorema del campionamento

Se $x(t)$ è a banda limitata a $|\omega| \leq \omega_m$ e $\omega_0 > 2\omega_m$,

allora $x(t)$ è **univocamente determinata** dai campioni $x(nT)$ e può essere ricostruita esattamente tramite:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right)$$

dove $\operatorname{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$.

5) Interpretazione intuitiva

- $x_s(t)$ è un treno di impulsi pesati dai valori del segnale originale.
- In frequenza, $X(\omega)$ viene replicato con passo ω_0 .
- Se $\omega_0 > 2\omega_m$, le repliche non si toccano \rightarrow nessun aliasing.
- La ricostruzione tramite sinc ricompone perfettamente $x(t)$ a partire dai campioni.

Formula di Carson

gli appunti dicono solo la formula:

$$B_\omega \approx 2(\Delta\omega_{\max} + \omega_m)$$

$$\Delta\omega_{\max} = \max_t |\Delta\omega(t)|.$$

Ok, terra-terra.

- FM/PM = prendi una portante e le fai **ondeggiare**: in frequenza (FM) o in fase (PM).
- Questo ondeggiare produce tante righe di spettro attorno alla portante: non resta solo la riga centrale, si “spalma” a destra e a sinistra.

La domanda è: **quanto larga diventa** questa macchia di righe?

La regola di Carson è una scorciatoia pratica:

La banda \approx “quanto ti spingi via dal centro” + “quanto velocemente cambia il messaggio”, il tutto su entrambi i lati.

Quindi: prendi

1. lo **scarto massimo** con cui la frequenza si allontana dalla portante (la “deviazione di picco”),
2. la **massima frequenza** contenuta nel messaggio (quanto è rapido il messaggio), e somma i due. Poi raddoppia perché lo spettro si allarga sia sopra che sotto.

Formula di Carson per modulazioni d'angolo (FM/PM)

Obiettivo: stimare la **larghezza di banda passabanda** B_ω (in rad/s) di un segnale modulato **in frequenza** o **in fase** quando il segnale modulante è limitato in banda a ω_m e la deviazione istantanea di pulsazione è $\Delta\omega(t)$.

$$B_\omega \approx 2(\Delta\omega_{\max} + \omega_m)$$

con

$$\Delta\omega_{\max} = \max_t |\Delta\omega(t)|.$$

Se lavori in Hz invece che in rad/s:

$$B_f \approx 2(\Delta f_{\max} + f_m)$$

dove $\Delta f_{\max} = \Delta\omega_{\max}/(2\pi)$ e $f_m = \omega_m/(2\pi)$.

Esempio lampo

Broadcast FM: tipico $\Delta f_{\max} = 75$ kHz, $f_m = 15$ kHz.

$$B_f \approx 2(75 + 15) \text{ kHz} = 180 \text{ kHz}.$$

10) QAM modulatore e demodulatore

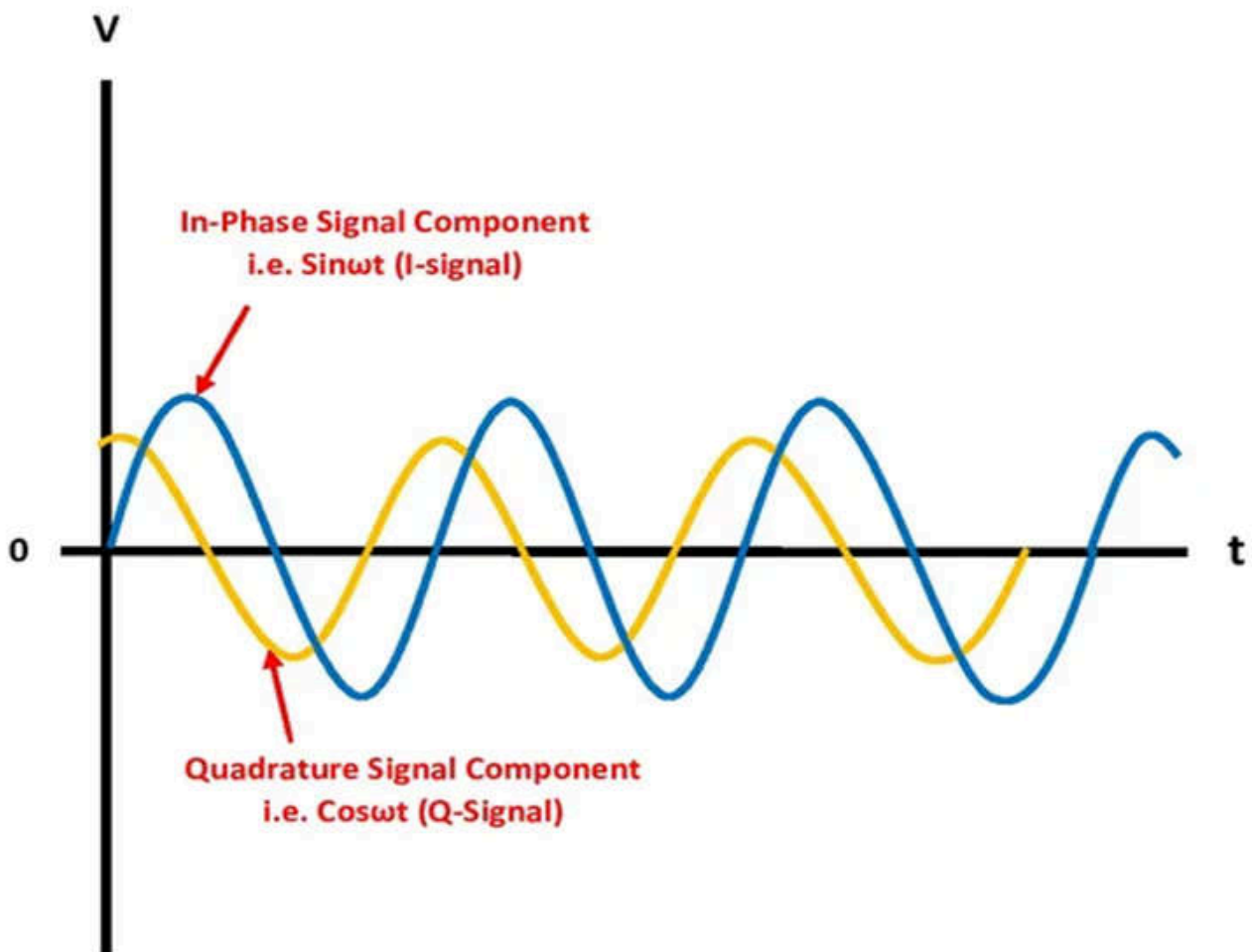
Recap di ChatGPT

QAM: I/Q spiegato senza menate

Portanti in quadratura (che vuol dire davvero)

- **Portante** = senoide veloce su cui “carichi” un segnale lento.
- **In quadratura** = due portanti uguali ma sfasate di **90°**:
 - una è il **coseno** ($\cos \omega_0 t$)
 - l'altra è il **seno** ($\sin \omega_0 t$)

- 90° significa: quando una è al massimo, l'altra è a zero. Per questo si dicono "ortogonali": si possono usare come **due corsie separate** sulla **stessa** frequenza.



I e Q: cosa sono

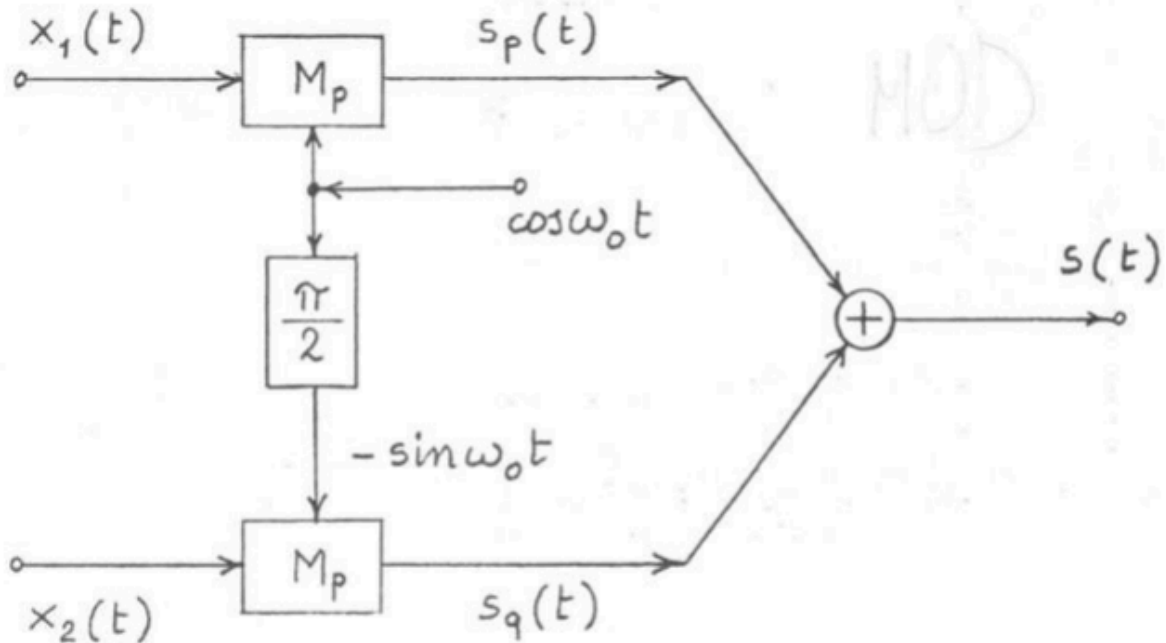
- **I** = *In-phase* → la parte che metti sulla portante **coseno**.
- **Q** = *Quadrature* → la parte che metti sulla portante **seno** (sfasata di 90°).
- Hai due segnali lenti (i tuoi dati) $x_1(t)$ e $x_2(t)$:
 - $x_1(t)$ va su **I** (coseno)
 - $x_2(t)$ va su **Q** (seno)

Formula compatta dell'onda trasmessa:

$$s(t) = x_1(t) \cos \omega_0 t - x_2(t) \sin \omega_0 t$$

Traduzione in parole: sommo "coseno pesato da x_1 " e "seno pesato (con segno meno) da x_2 ".

Risultato: **un'unica** RF che trasporta **due flussi** contemporanei (I e Q).

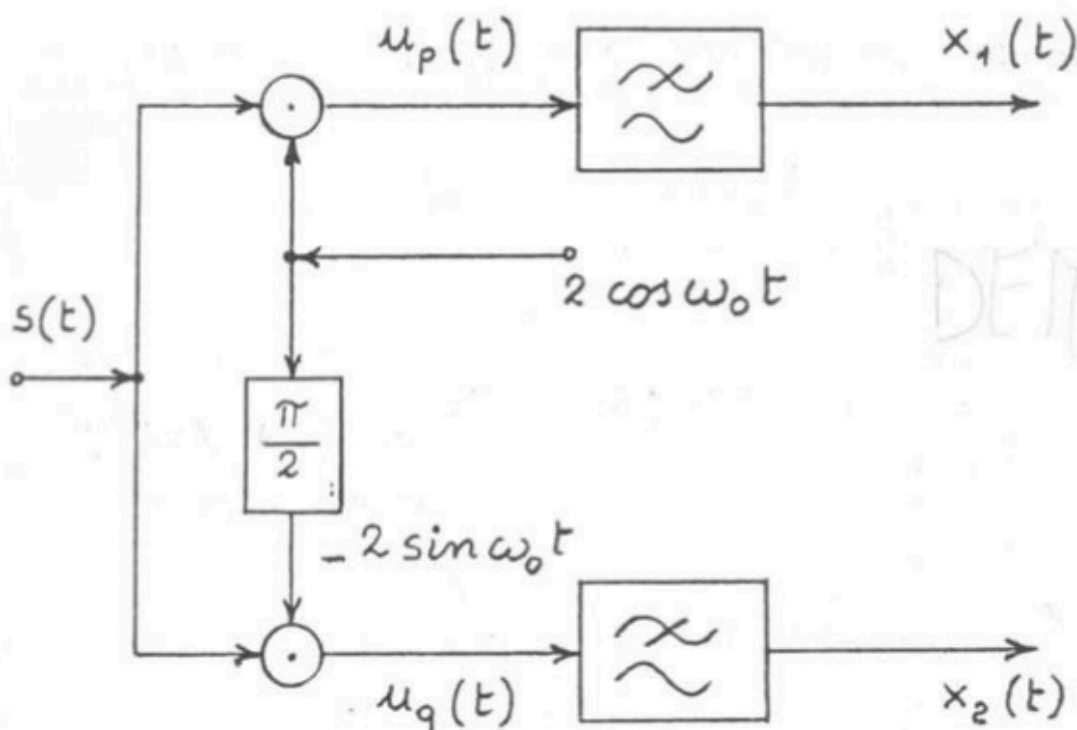


Come li recupero al ricevitore

1. Rimoltiplico il segnale ricevuto con **coseno** per estrarre **I**, e con **seno** per **Q**.
2. Passo in un **filtro passa-basso** (il "colino"): tiene la parte lenta e scarta la spazzatura ad alta frequenza.

In condizioni ideali ottengo di nuovo:

$$\hat{x}_1(t) = x_1(t), \quad \hat{x}_2(t) = x_2(t)$$



Se la fase sballa di Δ

- Se il ricevitore non è allineato in fase, i due rami **si mischiano** (cross-talk).
- Intuizione: nel piano I/Q il tuo segnale è un **vettore**; un errore di fase $\Delta =$ **ruotare** quel vettore di Δ .
 - Δ piccolo \rightarrow piccola contaminazione
 - $\Delta = 90^\circ \rightarrow$ I e Q si **scambiano**

//grafico: piano I (orizzontale) / Q (verticale) con rotazione di Δ

Immagine mentale definitiva

- Pensa a I come asse **orizzontale** e Q come asse **verticale**.
- QAM = inviare **lunghezza** (ampiezza) e **direzione** (fase) di quel vettore usando due portanti a 90° .
- Con LO allineato recuperi **due segnali indipendenti** sulla **stessa banda**.

Roba reale

Idea in 10 secondi

Portante in **quadratura** = due sinusoidi ortogonali: $\cos \omega_0 t$ e $-\sin \omega_0 t$.

Metto due segnali lenti $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sulle due portanti (moltiplicatori a prodotto). Sommo: il canale porta **due flussi** nella **stessa banda RF**. Al ricevitore rimoltiplico per le stesse portanti e faccio **passa-basso**: tornano x_1 e x_2 . Se la fase sballa di Δ , i due si mischiano.

Trasmittitore (modulatore QAM)

Due ingressi baseband:

- ramo **I**: $x_1(t)$ moltiplica $\cos \omega_0 t$
- ramo **Q**: $x_2(t)$ moltiplica $-\sin \omega_0 t$

I due prodotti sono

$$s_p(t) = x_1(t) \cos \omega_0 t$$

1) Dimostrare e descrivere il teorema del campionamento nel dominio dei tempi

$$s_q(t) = -x_2(t) \sin \omega_0 t$$

Si sommano:

$$s(t) = s_p(t) + s_q(t) = x_1(t) \cos \omega_0 t - x_2(t) \sin \omega_0 t$$

Ampiezza istantanea e fase del RF dipendono da x_1 e x_2 :

$$A(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}, \quad \phi(t) = \arctan 2(x_2(t), x_1(t))$$

cioè una **AM+PM** contemporanea (da qui “Quadrature Amplitude Modulation”).

//grafico blocco modulatore con due moltiplicatori e sommatore

Ricevitore ideale (demodulatore coerente)

Si rimoltiplica $s(t)$ con le **stesse** portanti locali (coerenti in fase) e poi **LPF** per togliere i doppi di frequenza:

Ramo I:

$$u_p(t) = s(t) \cdot 2 \cos \omega_0 t$$

Sviluppando:

$$u_p(t) = x_1(t) [1 + \cos 2\omega_0 t] - x_2(t) \sin 2\omega_0 t$$

Dopo passa-basso (taglia le componenti a $2\omega_0$):

$$\boxed{x_1(t)}$$

Ramo Q:

$$u_q(t) = s(t) \cdot 2(-\sin \omega_0 t)$$

Sviluppando:

$$u_q(t) = -x_1(t) \sin 2\omega_0 t + x_2(t) [1 - \cos 2\omega_0 t]$$

Dopo passa-basso:

$$\boxed{x_2(t)}$$

Condizioni per far funzionare la magia:

- x_1, x_2 sono **banda-base** (banda B) e $\omega_0 \gg B$
 - filtri passa-basso con banda $\geq B$ e forte attenuazione a $2\omega_0$
- //grafico schema demodulatore con LPF
-

Errore di fase Δ (LO non perfettamente allineato)

Se il locale usa $2 \cos(\omega_0 t - \Delta)$ e $-2 \sin(\omega_0 t - \Delta)$, gli output LPF diventano:

$$\hat{x}_1(t) = x_1(t) \cos \Delta - x_2(t) \sin \Delta$$

$$\hat{x}_2(t) = x_2(t) \cos \Delta + x_1(t) \sin \Delta$$

Effetto:

1. attenuazione $\cos \Delta$ del ramo utile,
2. **interferenza incrociata I \leftrightarrow Q** proporzionale a $\sin \Delta$.
A $\Delta = 0$ perfetto, a $\Delta = 90^\circ$ i rami si scambiano (disastro).

//grafico blocco demod con Δ e formule degli output

//grafico vettoriale che mostra la rotazione del vettore (I,Q) di angolo Δ

Involuppo complesso (notazione elegante e utile)

Scrivo $s(t)$ come parte reale di un complesso:

$$s(t) = \Re\{i(t) e^{j\omega_0 t}\}, \quad i(t) = x_1(t) + j x_2(t)$$

- $i(t)$ è il **segnale complesso equivalente** (o baseband complesso).
- Sul piano I/Q, $i(t)$ è un vettore con componenti (x_1, x_2) .
//grafico triangolino: asse orizzontale x_1 , asse verticale jx_2 , vettore $i(t)$

Questa forma spiega in un colpo solo:

- ampiezza $|i(t)| = A(t)$
- fase $\arg i(t) = \phi(t)$
- l'errore di fase del LO è una **rotazione** di $i(t)$ di Δ .

Cosa fanno davvero i filtri passa-basso

Le moltipliche generano termini utili (DC/baseband) e spurie a $2\omega_0$:

$$\cos \omega_0 t \cdot \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}[1 + \cos 2\omega_0 t], \quad \sin \omega_0 t \cdot \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} \sin 2\omega_0 t$$

Il LPF tiene la parte a zero-IF e butta via le armoniche a $2\omega_0$.

//grafico spettro: due lobi traslati su $\pm\omega_0$ e, dopo mixing, rientro a baseband + spurie a $2\omega_0$

Schema riassuntivo dei blocchi

- Trasmettitore: due moltiplicatori a prodotto (M_p), una rete di quadratura ($\pi/2$), sommatore.
- Ricevitore: due moltiplicatori (D_p), la stessa rete di quadratura, due LPF.

//grafico "Fig. modulatore" e "Fig. demodulatore" come nel libro

Due frasi da ricordare per l'esame

- "QAM trasporta **due segnali** reali e indipendenti nella **stessa banda RF** sfruttando portanti **ortogonali**."
- "Con LO sfasato di Δ si ha **perdita di guadagno** e **cross-talk**: i rami si mescolano secondo una rotazione di Δ nel piano I/Q."

Spiegazione ChatGPT dell'inviluppo

Inviluppo complesso (detto semplice)

Cos'è in una frase

È solo un modo furbo di **impacchettare I e Q** in **un unico segnale complesso**:

$$i(t) = x_1(t) + j x_2(t)$$

Così non scrivi sempre due cose (I e Q), ma **una**. Fine.

Perché esiste / a cosa serve

Perché la RF $s(t)$ è una sinusoide veloce; lavorarci direttamente è scomodo.

Con l'inviluppo complesso dici:

$$s(t) = \Re\{ i(t) e^{j\omega_0 t} \}$$

Traduzione: "La mia RF è una **portante** $e^{j\omega_0 t}$ che viene **pesata** da un numero complesso lento $i(t)$."

Cosa ci guadagni:

- **Portante separata** dal contenuto: tutta l'informazione sta in $i(t)$ (lento).
- **Filtri e modulazioni** diventano conti semplici a **bassa frequenza** (niente $2\omega_0$ in mezzo ai piedi).
- **Errore di fase** = **rotazione** di $i(t)$ (più facile da ragionare).

- È esattamente ciò che leggono gli **ADC I/Q**: campioni complessi.

Come leggerlo mentalmente

- $x_1(t)$ = asse **I** (orizzontale)
- $x_2(t)$ = asse **Q** (verticale)
- $i(t) = x_1 + jx_2$ è un **vettore** nel piano I/Q:
 - **lunghezza** $|i(t)|$ = ampiezza istantanea della RF
 - **angolo** $\arg i(t)$ = fase istantanea della RF
 //grafico: piano I/Q con vettore $i(t)$

Demodulazione vista con l'involuppo

Demodulare = “togliere” la portante: moltiplichi per $e^{-j\omega_0 t}$ e filtri passa-basso → ti rimane proprio $i(t)$.

Le **proiezioni** di $i(t)$ sugli assi danno x_1 e x_2 (I e Q).

Esempi flash

- **Solo AM su coseno**: $x_2(t) = 0 \rightarrow i(t) = x_1(t)$ reale → RF con ampiezza che segue x_1 .
- **Solo PM**: $|i(t)|$ costante, **angolo** che varia → fase che cambia, ampiezza fissa.
- **QAM digitale**: durante un simbolo $i(t)$ è **costante** = un **punto** della costellazione; simbolo dopo simbolo il punto salta.

L'errore di fase in una riga

Se il LO è sfasato di Δ , il ricevitore vede $i(t)$ **ruotato**: $i'(t) = i(t) e^{j\Delta}$.

Proiezioni cambiate ⇒ **I e Q si mischiano**.

Morale

- $s(t)$ è la RF “vera” che viaggia.
- $i(t)$ è **lo stesso segnale ma visto in baseband**, dove ragioni facile.
- “Involuppo complesso” = “I e Q in un'unica variabile complessa” + “la portante messa da parte”.

11) Modulazione e demodulazione a prodotto

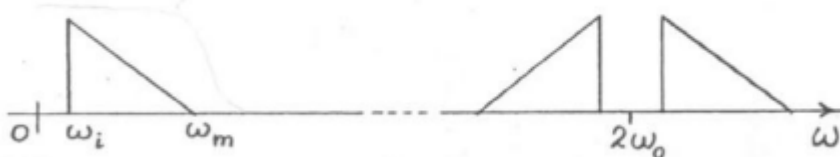
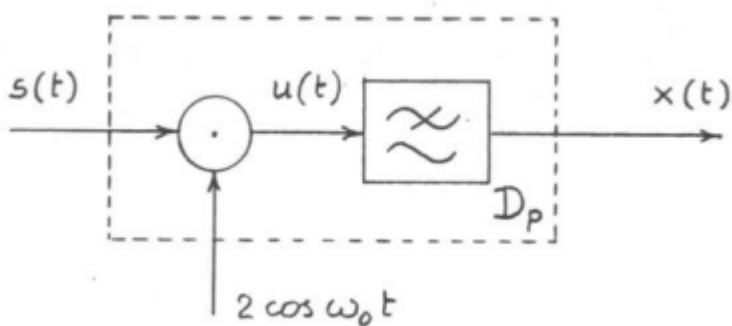
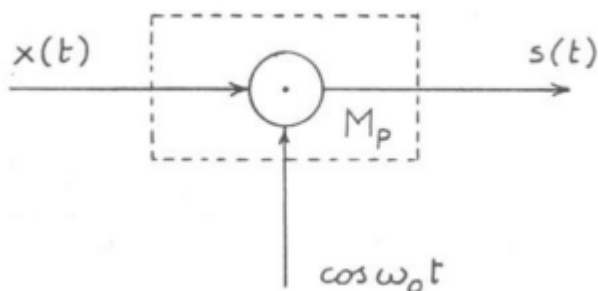
DSB-SC: modulazione e demodulazione a prodotto

Idea in 1 riga

Prendi il segnale baseband $x(t)$ e lo **sposti** attorno alla portante ω_0 moltiplicandolo:

$$s(t) = x(t) \cos(\omega_0 t) \quad (\text{modulatore a prodotto } M_p)$$

Risultato: **due bande laterali** attorno a $\pm\omega_0$ e **nessuna riga alla portante** \rightarrow "Suppressed Carrier".



Perché "suppressed carrier"

Usando l'identità

$$x(t) \cos(\omega_0 t) \iff \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)],$$

lo spettro $S(\omega)$ è solo la somma di **due copie di $X(\omega)$ traslate**. Nessuna delta a ω_0 .

Nota: se $x(t)$ ha **componente DC** ($X(0) \neq 0$), compare una riga residua a ω_0 (carrier "leak"), ma l'ideale DSB-SC assume $X(0) = 0$.

Demodulazione coerente (product detector)

Per tornare a $x(t)$ si rimoltiplica $s(t)$ per un riferimento **sincrono** alla portante e poi si filtra passa-basso.

Il libro/appunti usano un fattore 2 per ottenere guadagno unitario quando la fase è allineata:

$$u(t) = s(t) \cdot 2 \cos(\omega_0 t - \Delta)$$

Espandendo:

$$\begin{aligned} u(t) &= x(t) \cos(\omega_0 t) \cdot 2 \cos(\omega_0 t - \Delta) \\ &= x(t) [\cos \Delta + \cos(2\omega_0 t - \Delta)] \end{aligned}$$

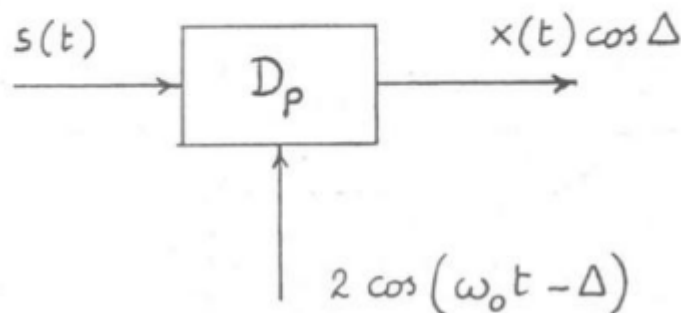
Il **passa-basso** elimina il termine ad alta frequenza $\cos(2\omega_0 t - \Delta)$ e rimane

$$y(t) = x(t) \cos \Delta$$

Quindi:

- se $\Delta = 0$ (portante perfettamente allineata in **frequenza e fase**), $y(t) = x(t)$.
- se c'è **errore di fase** Δ , l'uscita è attenuata di $\cos \Delta$ (niente distorsione di forma, solo scala).
- se $\Delta = \pm\pi/2$, $y(t) = 0 \rightarrow$ demodulatore "cieco".

SI NOTI CHE IN PRESENZA DI UN ERRORE Δ NELLA FASE DI RIFERIMENTO (FIGURA 9.6.4) L'USCITA DEL DEMODULATORE A PRODOTTO VALE $x(t) \cos \Delta$: SI HA DUNQUE UNA DIMINUIZIONE DI LIVELLO DEL SEGNALE DEMODULATO.



Perché il "2" davanti al coseno in demodulazione?

Senza quel 2, dal prodotto $\cos \cdot \cos$ salterebbe fuori un $\frac{1}{2}$ e l'uscita a fase giusta sarebbe $x(t)/2$. Il fattore 2 compensa e dà guadagno unitario.

Banda del passa-basso: deve passare tutto lo spettro utile di $x(t)$ (fino a ω_m , la massima frequenza di $x(t)$) e **tagliare** le repliche attorno a $2\omega_0$.

Riassunto operativo

- **Modulazione (DSB-SC)**

$$s(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$$

Spettro: due copie di $X(\omega)$ a $\pm\omega_0$. Carrier soppressa.

- **Demodulazione coerente**

$$u(t) = s(t) \cdot 2 \cos(\omega_0 t - \Delta) = x(t) \cos \Delta + x(t) \cos(2\omega_0 t - \Delta)$$

$$y(t) = \text{LPF}\{u(t)\} = x(t) \cos \Delta$$

- **Sensibilità alla fase**

Ampiezza $\propto \cos \Delta$. Serve **sincronizzazione** (Costas loop, PLL, ecc. nella pratica) per avere $\Delta \approx 0$.

Piccole note che chiariscono i dubbi tipici

- “Perché appare $2\omega_0$ prima del filtro?”

Perché nel prodotto $\cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t - \Delta)$ c'è il termine a **somma** di frequenze $\rightarrow \cos(2\omega_0 t - \Delta)$.

- “Filtro passa-basso o rimoltiplico per il coseno?”

Entrambi. Prima **rimoltiplichi** (product detector), poi **LPF**. La sola moltiplicazione genera baseband + $2\omega_0$; il LPF tiene solo la baseband.

- “Quanti segnali sto mandando?”

Uno solo, $s(t)$. Le “due bande” sono due pezzi di **uno stesso spettro** attorno a $\pm\omega_0$.

- “Cos'è l'errore di fase Δ nel disegno ‘ $2 \cos(\omega_0 t - \Delta)$ ’?”

È lo **sfasamento** tra la portante del trasmettitore e quella ricostruita al ricevitore. L'uscita diventa $x(t) \cos \Delta$ come negli appunti/nel libro.

13) Ricavare e spiegare l'efficienza dei protocolli di sliding window in assenza di errori con relativi diagrammi temporali

(non trovato sul libro)

Spiegazione da disperati da ChatGPT

Sliding Window: spiegazione terra-terra (senza errori)

//grafico “pipeline piena”: 3 frame in fila, ACK che tornano mentre continuo a trasmettere

//grafico “pipeline vuota a tratti”: 2 frame, poi pausa in attesa di ACK, poi riparto

L’idea in 30 secondi

- Devo spedire tanti **frame** (pacchetti). Ogni frame ha:
 - **D** = dati utili (il contenuto vero)
 - **H** = overhead (header ecc.)
 - **F = D + H** = grandezza totale del frame
- Ho una **finestra** di grandezza **W**: posso buttare in linea **fino a W frame** prima di **dover** aspettare gli ACK.
- Il canale ha **capacità C** [bit/s] e il segnale impiega **I** secondi a farsi un giro **A→B** (propagazione + eventuale elaborazione a destinazione). L’andata e ritorno è circa $2I$.

Come leggere quel maledetto disegno $A \leftrightarrow B$

//grafico “time-sequence” con colonne A e B, tempo che scorre verso il basso, linee oblique $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$

Coordinate del disegno

- **Colonne**: a sinistra c’è **A** (mittente), a destra **B** (ricevente).
- **Asse verticale**: il **tempo** scorre **verso il basso**.
- **Linee oblique**:
 - **A→B**: una linea che va **in diagonale verso destra** è un **frame** che parte da A e **viaggia** fino a B.
 - **B→A**: una linea che va **in diagonale verso sinistra** è un **ACK** che parte da B e torna ad A.

Cosa significano le pendenze e gli spazi

- La **pendenza** della diagonale è semplicemente “si sposta nel tempo mentre si sposta nello spazio”:
 - il **tratto obliquo** rappresenta **solo la propagazione** (tempo R o I nell’andata).
- Ogni invio ha anche un **tempo di trasmissione (serializzazione)** prima che il segnale “entri nel cavo”:
 - per un frame: F/C .
 - per un ACK: ACK/C (spesso piccolo).
- Nel disegno spesso questo tempo di trasmissione lo “vedi” come il **distacco temporale** tra l’inizio di un frame e l’inizio del successivo a A: A non può iniziare il frame $k + 1$ finché

non ha finito di **serializzare** il frame k .

Leggi un singolo scambio (zoom su “FRAME 0”)

1. **A inizia a trasmettere** FRAME 0: per F/C secondi A sta “spingendo bit sul filo”.
2. Quando i bit partono, **viaggiano** verso B: quel viaggio è la **diagonale A→B** (tempo $\approx I$).
3. **B riceve tutto il frame**, lo elabora (eventuale E), e manda un **ACK**:
 - l'ACK si **serializza** in ACK/C ,
 - poi **propaga** indietro: diagonale **B→A** per un altro I .
4. Quando l'ACK **arriva ad A**, A **sposta la finestra** (sliding) e può considerare confermato quel frame.

Perché a volte ci sono “buchi” vuoti tra le diagonali?

- Se la finestra è **grande** (caso $WF > 2IC$), A **mentre** aspetta il primo ACK sta già mandando altri frame: il disegno mostra una **griglia fitta di diagonali A→B** senza pause. Canale **sempre pieno**.
- Se la finestra è **piccola** ($WF \leq 2IC$), A **finisce** di inviare i W frame **prima** che arrivi il primo ACK e **deve aspettare**: nel disegno vedi un **buco verticale** sul lato A (nessuna diagonale che parte), poi quando arriva l'ACK A riparte. Quell'area vuota è **tempo morto**.

Come riconosci “quanti frame stanno in volo”

- Conta quante diagonali **A→B** sono contemporaneamente “aperte” tra A e B **prima** che arrivi il primo ACK: quello è massimo W .
- Se le diagonali A→B “coprono” senza interruzioni tutto il percorso fino agli ACK B→A, sei in **saturation** (pipeline piena).
- Se dopo W diagonali A→B c'è uno **stacco** prima di vedere nuovi invii, sei in **attesa di ACK** (window-limited).

Mini ASCII per fissarla

Cosa decide tutto?

Confronto **quanti bit tengo “in volo”** con **quanti bit ci stanno nel tubo mentre aspetto gli ACK**:

- Bit “in volo” massimi che riesco a spingere: $W \cdot F$

- Bit che il canale può “contenere” durante un RTT: $2IC$ (chiamata anche **BDP**, bandwidth–delay product)

Due casi (fine della storia)

1) Finestra grande: $WF > 2IC \rightarrow$ canale sempre pieno

Il mittente **non si ferma mai**: mentre arrivano gli ACK io sto già trasmettendo altri frame. L'efficienza è solo “quanto payload c'è dentro ogni frame”:

$$\eta = \frac{D}{D + H}$$

Interpretazione: se il frame è 90% dati e 10% header, **stai usando il 90% della banda per roba utile**. Fine.

2) Finestra piccola: $WF \leq 2IC \rightarrow$ ogni tanto resti in attesa

Spingi W frame, poi **aspetti** che torni il primo ACK. In questo caso l'efficienza cala perché paghi pause.

Il tempo “ciclo” (butto W frame e aspetto l'ACK che mi sblocca) vale circa:

$$TT \approx \frac{F}{C} + \frac{ACK}{C} + 2I$$

(dove in pratica $ACK \approx H$ nei conti del prof)

In quel tempo consegna $W \cdot D$ bit utili, quindi:

$$\eta = \frac{WD}{CTT} \approx \frac{WD}{D + 2H + 2IC}$$

Note flash:

- Se $W = 1$ (Stop-and-Wait) ritorna:

$$\eta \approx \frac{D}{D + 2H + 2IC}$$

- Appena WF **supera** $2IC$, torni nel caso 1 e $\eta \rightarrow D/(D + H)$.

Come si usa in pratica (ricetta lampo)

1. Calcola $F = D + H$.
2. Calcola la **soglia** $2IC$.

3. Confronta WF con $2IC$:

- Se $WF > 2IC$ usa $\eta = D/(D + H)$.
- Se $WF \leq 2IC$ usa $\eta \approx \frac{WD}{D + 2H + 2IC}$.

4. Se vuoi più efficienza quando sei "in attesa", **aumenti** W o D (frame più grossi), oppure **riduci** I (meno RTT).**Esempio numerico idiot-proof (con significato delle lettere)**

- $C = 10$ Mbit/s ← **capacità del canale**
- $I = 10$ ms ← **ritardo unidirezionale** (propagazione+elaborazione)
- $2IC = 2 \cdot 0.01 \cdot 10$ M = 200 kbit ← **BDP a RTT** (bit "che ci stanno nel tubo")
- $D = 1$ kB = 8 kbit ← **payload** per frame
- $H = 0.5$ kB = 4 kbit ← **header/overhead** per frame
- $F = D + H = 12$ kbit ← **lunghezza frame** (totale: dati+header)
- $ACK \approx H = 4$ kbit ← **lunghezza dell'ACK**
- W ← **ampiezza finestra** (max frame contemporanei)

Caso 1: finestra piccola

- $W = 10 \Rightarrow WF = 120$ kbit ≤ 200 kbit

$$\eta \approx \frac{WD}{D + 2H + 2IC} = \frac{10 \cdot 8}{8 + 2 \cdot 4 + 200} = \frac{80}{216} \approx 0.37$$

Significato: metà del denominatore è $2IC =$ **attesa degli ACK** \Rightarrow efficienza bassa.

Caso 2: canale pieno (saturazione)

- $W = 30 \Rightarrow WF = 360$ kbit > 200 kbit

$$\eta = \frac{D}{D + H} = \frac{8}{8 + 4} = \frac{2}{3} \approx 0.67$$

Significato: **pipeline piena** \Rightarrow conta solo l'overhead di frame.

Mini legenda riassuntiva

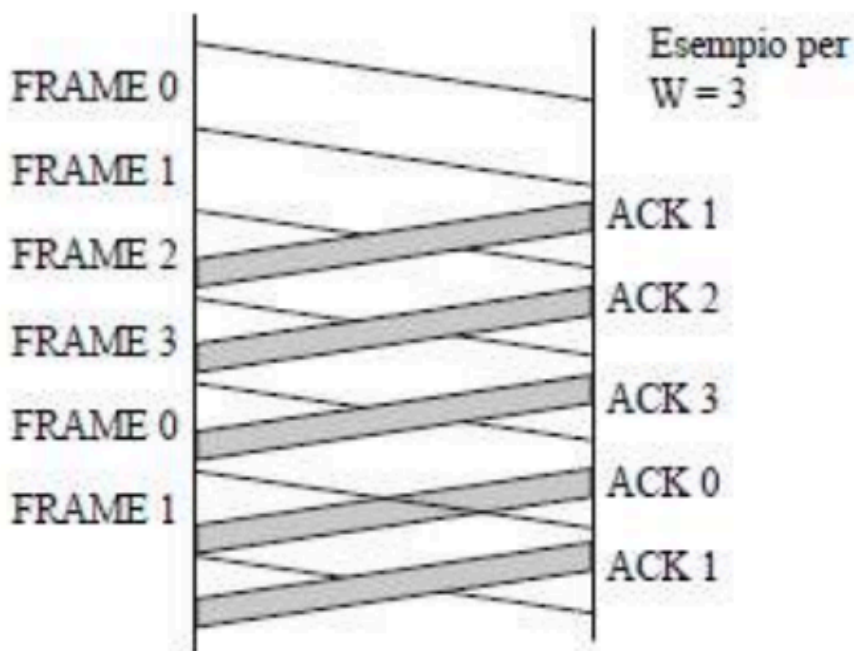
- C = capacità del canale [bit/s]
- I = ritardo unidirezionale (A \rightarrow B o B \rightarrow A) [s]
- $2I$ = RTT "di canale" (andata+ritorno) [s]
- D = bit di dati utili per frame [bit]

- H = bit di header/overhead per frame [bit]
- F = lunghezza totale frame = $D + H$ [bit]
- ACK = lunghezza dell'ACK [bit] (qui $ACK \approx H$)
- W = finestra (quanti frame puoi tenere "in volo")
- WF = bit massimi "in volo" con la finestra
- $2IC$ = BDP a RTT (bit "che entrano nel tubo" durante l'andata+ritorno)
- η = efficienza = throughput utile / C

Morale cinica ma vera

- Se la **RTT è grande** (grande I), con finestre piccole **butti banda**.
- Vuoi efficienza? **Pipelines più lunghe** (W grande) e **frame meno "chiacchieroni"** (H piccolo, D grande).
- Quando "riempi il tubo", l'unica cosa che ti frega è l'overhead del frame.

Sliding Window (senza errori): efficienza, intuizione e formule



$$\eta = \frac{D}{D + H}$$

Idea in 10 secondi

- Con **sliding window** A può spedire fino a W **frame** di fila prima di dover aspettare ACK.
- Se i W frame **riempiono il canale** durante l'andata/ritorno dei segnali (cioè la **bandwidth-delay product**, BDP), A **non si ferma mai** \Rightarrow canale sempre occupato \Rightarrow l'efficienza è solo "payload su frame".

- Se invece W **non basta a riempire** la BDP, A **rimane in attesa** degli ACK con il canale vuoto per un po' \Rightarrow l'efficienza scende perché paghiamo tempi morti.

Parametri (uniformati tra appunti e libro)

- D : bit di **dati** (payload) in un frame
- H : bit di **header** di un frame
- $F = D + H$: **lunghezza** del frame dati
- ACK : lunghezza dell'ACK (assumiamo $ACK \approx H$ come spesso nei conti del libro)
- C : capacità del canale [bit/s]
- R : tempo di **propagazione** di un verso ($A \rightarrow B$ o $B \rightarrow A$)
- E : tempo di **elaborazione/composizione/controlli** (se trascurabile, puoi metterlo a 0)
- $I = E + R$: **ritardo unidirezionale** “non di trasmissione” (propagazione + eventuale elaborazione)
- **RTT** “lato canale” $\approx 2I$ ($A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$)
- W : ampiezza finestra (num. massimo di frame in volo)

Convenzione utile: **BDP** (bandwidth–delay product) a RTT vale

$$BDP = C \cdot 2I \quad [\text{bit}]$$

Definizione di efficienza

Efficienza η = throughput utile / capacità del canale.

Nel nostro setting senza errori:

$$\eta = \frac{\text{bit di payload consegnati al secondo}}{C}$$

Caso A — Finestra “grande” (canale saturo)

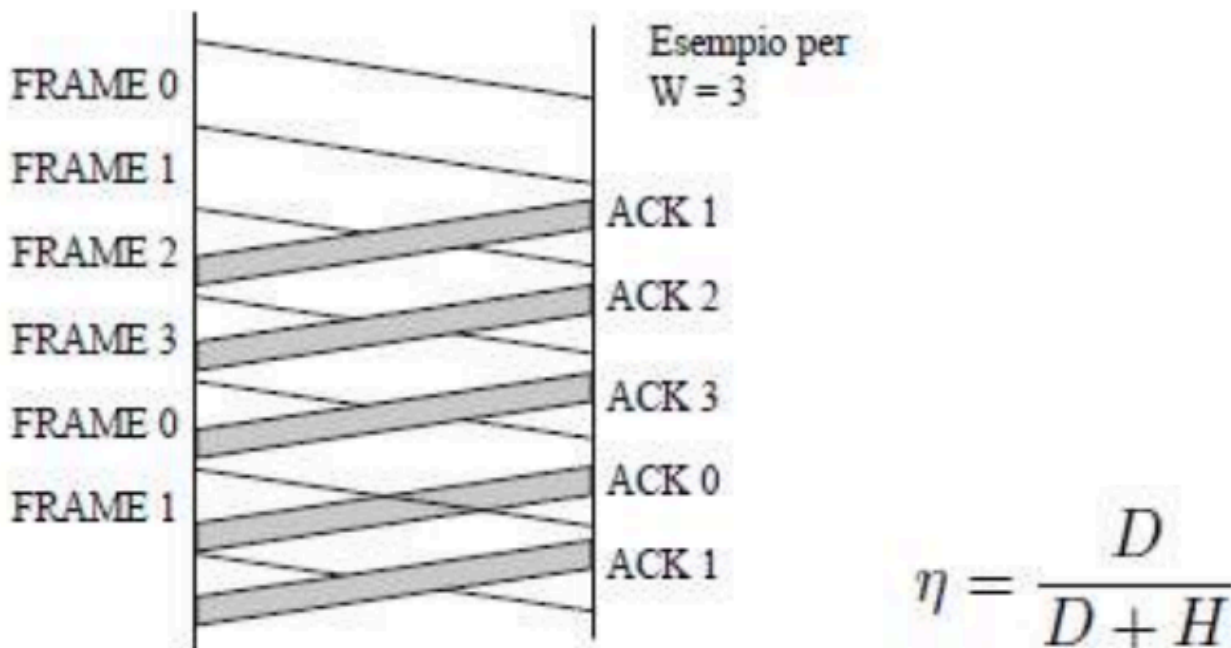
Condizione: $WF > C \cdot 2I$ (cioè i W frame in volo superano la BDP a RTT)

Intuizione: il trasmettitore non resta mai a secco: appena finisce di serializzare un frame, ne ha già un altro da inviare; gli ACK arrivano mentre lui continua a trasmettere.

In saturazione il canale porta **sempre** frame di lunghezza F , quindi:

$$\eta = \frac{\text{bit utili trasmessi}}{\text{bit totali trasmessi}} = \frac{D}{F} = \frac{D}{D + H}$$

Questa è proprio la formula negli appunti: in saturazione contano solo gli **overhead** del frame; i ritardi di propagazione non si vedono perché sono nascosti dalla pipeline.



Caso B — Finestra “piccola” (window-limited)

Condizione: $WF \leq C \cdot 2I$

Qui il mittente **finisce** i W frame **prima** che torni il primo ACK utile \Rightarrow deve **aspettare**. In un **ciclo logico** (quello che negli appunti chiamano TT) succede:

- A trasmette un frame: tempo di **trasmissione** F/C
- propagazione $A \rightarrow B$: I
- B trasmette l'ACK: **trasmissione** ACK/C ($\approx H/C$)
- propagazione $B \rightarrow A$: I

Quindi (versione “stop-and-wait” del ciclo base):

$$TT = \frac{F}{C} + \frac{ACK}{C} + 2I$$

Con finestra W in **un** TT riusciamo a far accettare dalla rete W **frame** (tutti i W “spinti” prima che torni il primo ACK).

Throughput utile:

$$S = \frac{W \cdot D}{TT} \implies \eta = \frac{S}{C} = \frac{WD}{CTT}$$

Sostituendo TT e usando $F = D + H$ e $ACK \approx H$:

$$CTT = F + ACK + 2IC \approx (D + H) + H + 2IC = D + 2H + 2IC$$

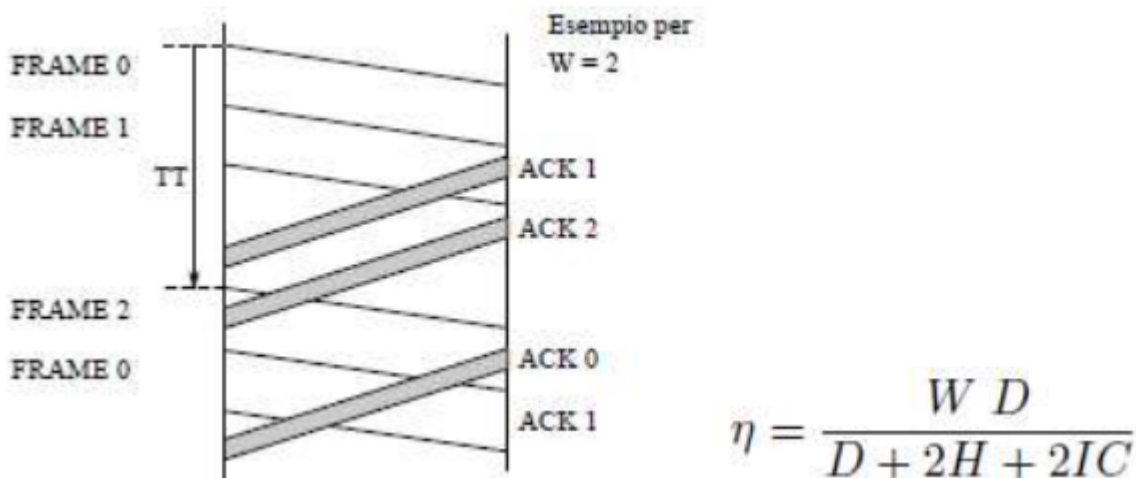
$$\eta \approx \frac{WD}{D + 2H + 2IC}$$

Osservazioni rapide:

- Mettendo $W = 1$ torni alla formula tipica dello **Stop-and-Wait**:

$$\eta \approx \frac{D}{D + 2H + 2IC}$$

- A parità di tutto, η cresce con W e con D , e cala con H e con I (linee "in attesa" di ACK).
- Quando W cresce tanto da soddisfare $WF > 2IC$ (cioè supera la BDP), **rientri nel Caso A** e $\eta \rightarrow D/(D + H)$.



Riassunto visivo dei due regimi

- **Regime saturo (pipeline piena):**

$$WF > 2IC \Rightarrow \eta = \frac{D}{D + H}$$

- **Regime window-limited:**

$$WF \leq 2IC \Rightarrow \eta \approx \frac{W D}{D + 2H + 2IC}$$

Note pratiche

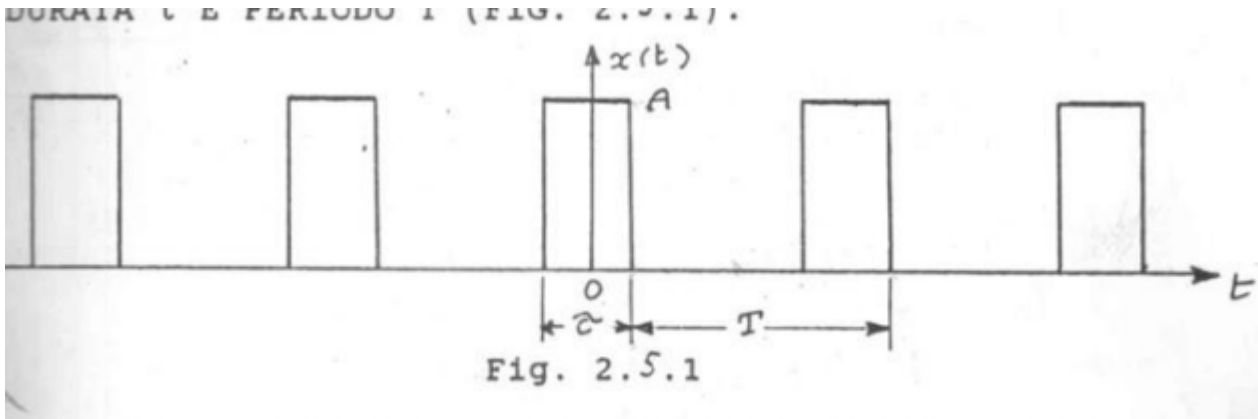
- $ACK \approx H$ è l'assunzione che fa tornare la formula degli appunti del prof. Se l'ACK fosse diverso, basta sostituire ACK al posto di H nelle espressioni.
- Se E è trascurabile allora $I \approx R$. Se non lo è, tieni $I = E + R$ come negli appunti: aumenta il termine $2IC$ e quindi **peggiora** l'efficienza nel regime window-limited.

- Aumentare W o D (MTU più grande) aiuta quando la RTT (cioè $2I$) è grande: è il classico motivo per cui i protocolli ad alte prestazioni curano sia finestra che dimensione dei segmenti.

17) Calcolare e disegnare gli spettri di ampiezza e di fase di una successione periodica di impulsi rettangolari di ampiezza A durata e periodo T . Commentare.

Treno periodico di impulsi rettangolari: spettro di ampiezza e fase

Segnale: treno periodico di impulsi rettangolari di ampiezza A , durata τ , periodo T .
 Scelgo l'impulso **centrato** nell'intervallo $(-\tau/2, \tau/2)$ di ogni periodo. Frequenza fondamentale $\omega_0 = 2\pi/T$. Area dell'impulso $I = A\tau$. Duty-cycle $D = \tau/T$.



Coefficienti di Fourier complessi c_n

Per un segnale tempo-continuo e **periodico** i coefficienti complessi sono

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

ma $x(t)$ è diverso da zero solo su $(-\tau/2, \tau/2)$:

$$c_n = \frac{A}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T} \frac{2 \sin\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right)}{n\omega_0}.$$

Scrivendolo con $I = A\tau$:

$$c_n = \frac{I}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right)}{\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Per $n = 0$ si ha

1) Dimostrare e descrivere il teorema del campionamento nel dominio dei tempi

$$c_0 = \frac{1}{T} \int x(t) dt = \frac{I}{T} = A \frac{\tau}{T}.$$

Osservazioni chiave:

- i c_n sono **reali** perché l'impulso è centrato (se lo trasli, compare un fattore $e^{-jn\omega_0 t_0}$ che aggiunge fase lineare).
- Zeri quando $\sin\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{n\omega_0\tau}{2} = k\pi \Rightarrow n = k \frac{T}{\tau} = k \frac{1}{D}$.

Spettro di ampiezza A_n e di fase φ_n

Definisco l'ampiezza come il modulo dei coefficienti e la fase come il loro argomento:

$$A_0 = \frac{I}{T} = A D$$

$$A_n = |c_n| = \frac{I}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)}{\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)}, \quad n \geq 1$$

$$\varphi_n = \begin{cases} 0, & c_n > 0 \\ \pi, & c_n < 0 \end{cases}, \quad n \geq 1$$

Quindi le ampiezze campionano una **sinc**:

$$\text{inv. sinc}(\omega) = \frac{I}{T} \frac{\sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)}{\omega \frac{\tau}{2}}$$

valutata in $\omega = n\omega_0$.

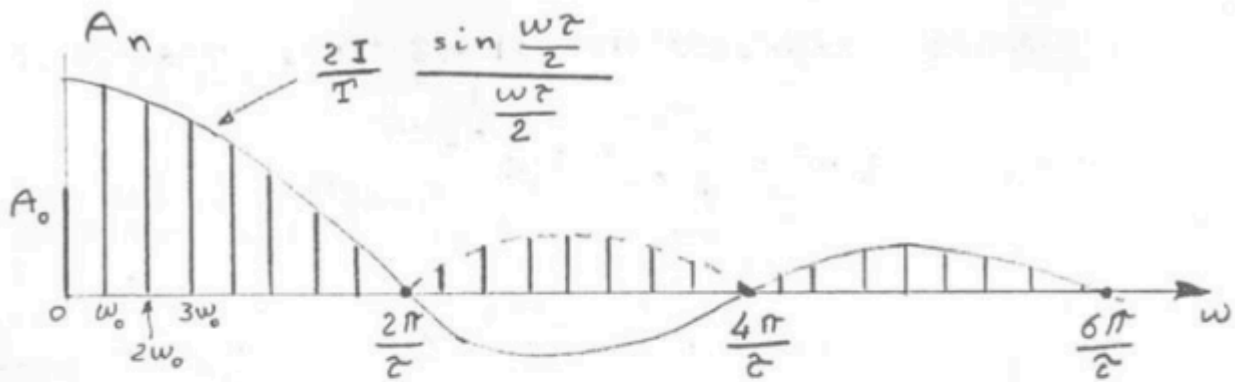


Fig. 2.5.2

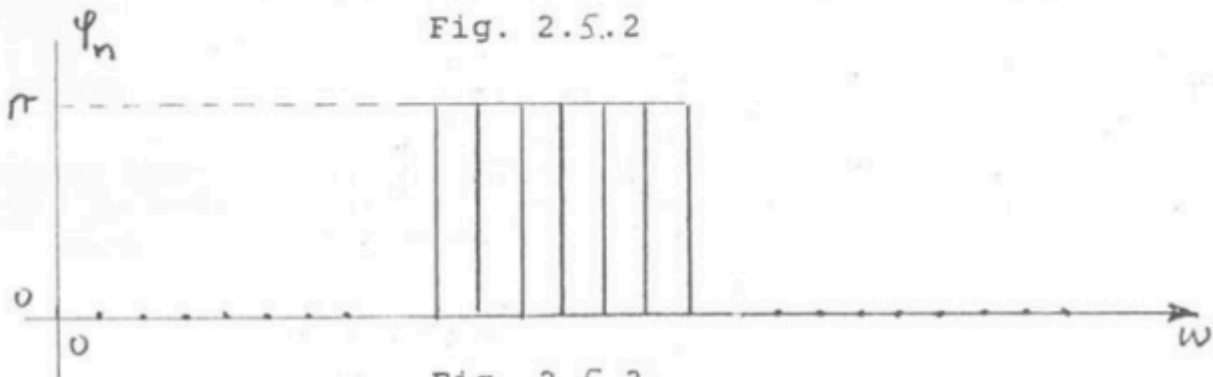


Fig. 2.5.3

Intuizione pratica

- Durata più **piccola** τ (duty-cycle minore) \Rightarrow involuoco sinc più **largo** \Rightarrow più armoniche significative.

Il compromesso tempo-frequenza classico: impulsi stretti nel tempo occupano più banda in frequenza.

- Gli **zeri** dell'involuoco cadono a $n = kT/\tau$; quegli armonici spariscono del tutto.
- Se l'impulso non è centrato ma traslato di t_0 , allora

$$c_n \rightarrow c_n e^{-jn\omega_0 t_0}$$

L'ampiezza A_n non cambia, cambia solo la fase: $\varphi_n \rightarrow \varphi_n - n\omega_0 t_0$ (fase **lineare** in n).

Riassunto compatto

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad I = A\tau, \quad D = \frac{\tau}{T}$$

$$c_0 = \frac{I}{T}, \quad c_n = \frac{I}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)}{\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)}, \quad n \neq 0$$

$$A_n = |c_n|, \quad \varphi_n = \arg(c_n) \in \{0, \pi\}$$

Commento finale: i grafici negli appunti e nel libro coincidono — stanghette alle frequenze multiple di ω_0 , involuppo sinc, fase a $0/\pi$ perché il segnale è reale ed **pari**. Riducendo τ aumenta la larghezza dell'involuppo e quindi il numero di armoniche "visibili".

Disegnare lo schema a blocchi di un filtro trasversale e relativa funzione di trasferimento

Idea in una riga

- **Trasversale (non ricorrente/FIR):** solo *taps* dell'ingresso ritardato \rightarrow media/polinomio in z^{-1} , **nessun feedback**.
- **Ricorrente (IIR):** oltre ai *taps* d'ingresso ci sono *taps* dell'**uscita ritardata** che rientrano \rightarrow **feedback**.
- **Puramente ricorrente (all-pole):** nessun *tap* d'ingresso tranne $h_0 = 1$, solo feedback.

quindi solo ingresso = normale

ricorrente= ingresso + uscita

pur. ric= solo uscita

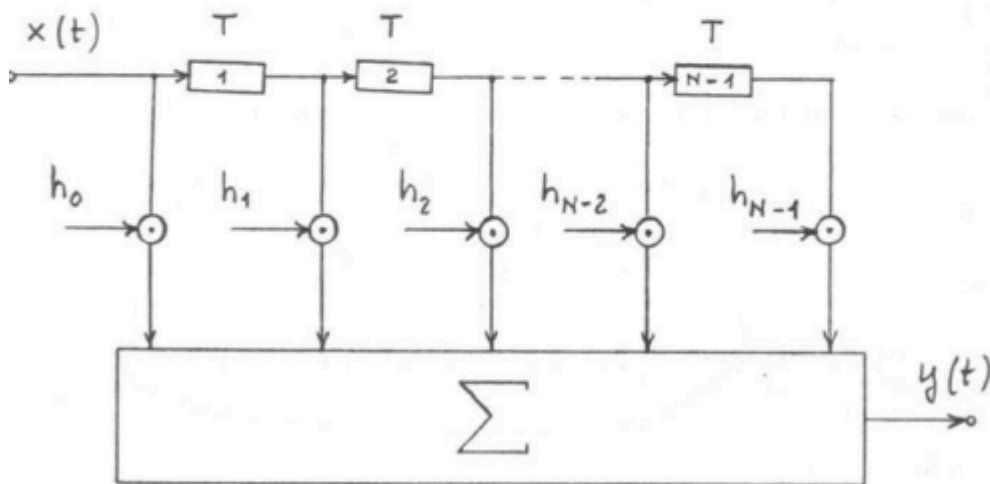
Filtro trasversale (h' nulli) – FIR

Schema: sola linea di ritardo con N prese pesate h_0, \dots, h_{N-1} che vanno a un sommatore.

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-jk\omega T} \iff H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k z^{-k}$$

$h_k=0$ TRASV. (NON RICORRENTE)

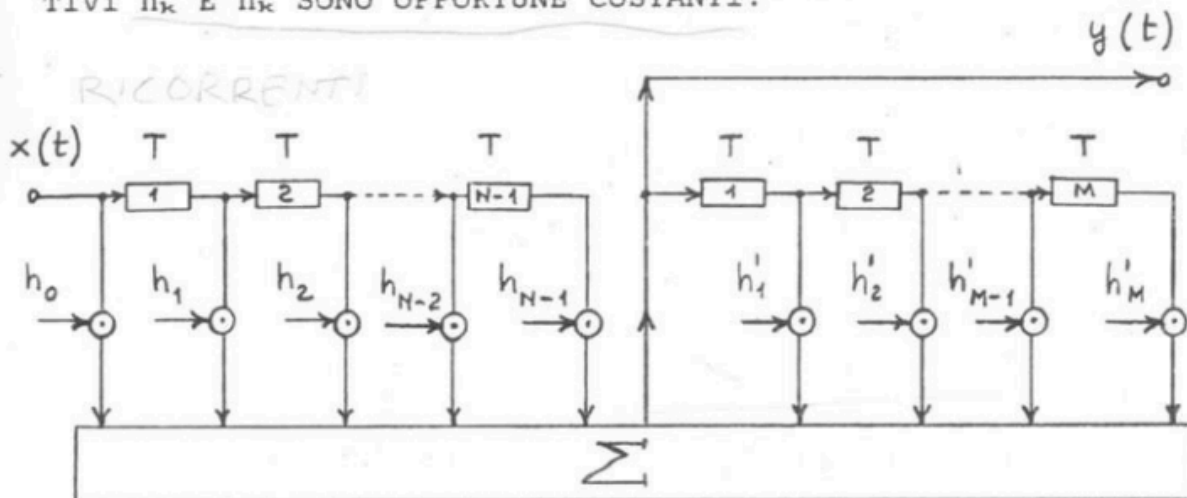
$$(3.4.4) \quad H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-jk\omega T}$$



Ricorrente (IIR):

TIVI h_k E h'_k SONO OPPORTUNE COSTANTI.

RICORRENTE!



Schema: come sopra **più** M rami che prelevano $y(t)$, la ritardano di kT , la pesano con h'_k e la **rientrano** nel sommatore.

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-jk\omega T}}{1 - \sum_{k=1}^M h'_k e^{-jk\omega T}} \iff H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} h_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^M h'_k z^{-k}}$$

Puramente ricorrente (all-pole)

Condizioni: $h_k = 0$ per $k \neq 0$ e $h_0 = 1$.

1) Dimostrare e descrivere il teorema del campionamento nel dominio dei tempi

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^M h'_k e^{-jk\omega T}} \iff H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^M h'_k z^{-k}}$$

$h_k = 0$ - PURAM. RIC

(3.4.5)
$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^M h'_k e^{-jk\omega T}}$$

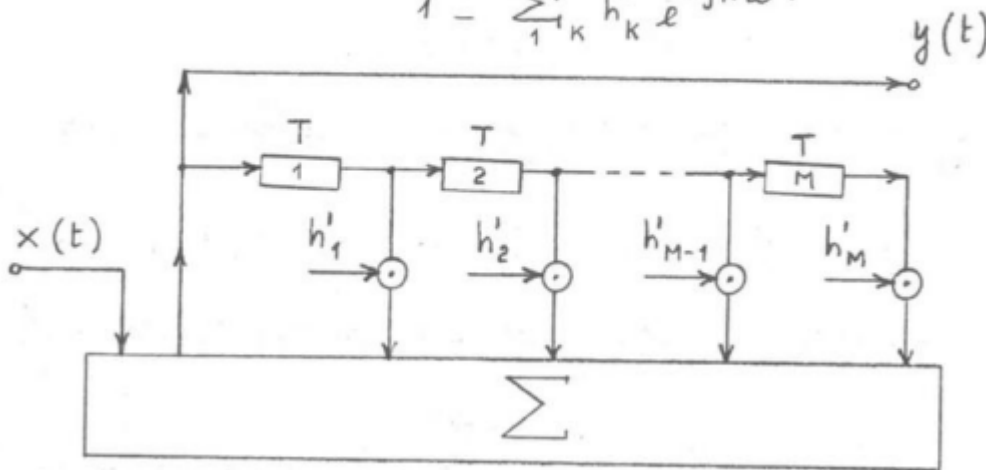


Fig. 3.4.3

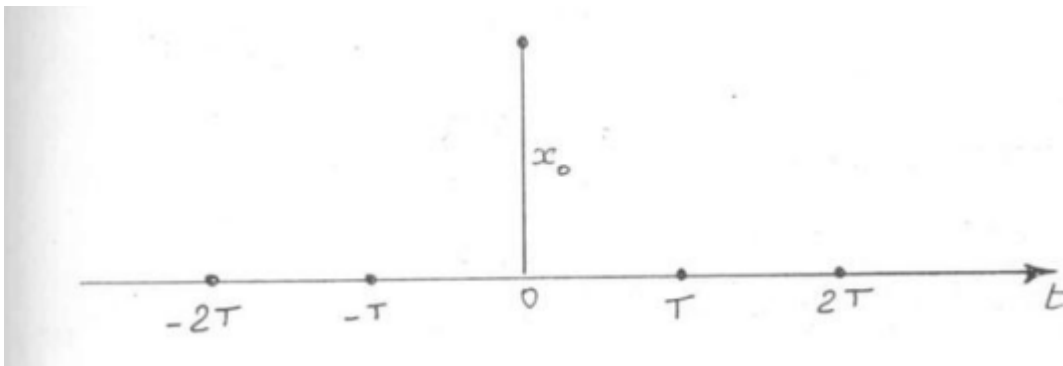
16) Esprimere nel dominio delle frequenze la condizione necessaria e sufficiente perché una funzione $x(t)$ assuma i valori $x_n = x(nT) = x_0 \neq 0$ per $n=0$ e $x_n = x(nT) = 0$ per $n \neq 0$

(pag 65)

Campionamento "ideale" nel tempo e condizione in frequenza

Vogliamo una $x(t)$ tale che, campionando a passi T , la **sequenza dei campioni** sia:

$$x_n = x(nT) = \begin{cases} x_0 \neq 0, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x_n = x_0 \delta[n].$$



La DTFT (trasformata secondo Fourier della serie temporale $\{x_n\}$) è

1) Dimostrare e descrivere il teorema del campionamento nel dominio dei tempi

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{-jn\omega T} = x_0.$$

Quindi è **costante** in ω .

D'altra parte, per il teorema di campionamento/Poisson:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\omega + k\frac{2\pi}{T}\right).$$

Condizione necessaria e sufficiente per ottenere i campioni desiderati:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\omega + k\frac{2\pi}{T}\right) \equiv x_0 T \quad \text{per ogni } \omega$$

cioè la **ripetizione periodica** di $X(\omega)$ di passo $2\pi/T$ deve sommare a una **costante piatta** $x_0 T$.

Conseguenze pratiche (lettura dei disegni)

I) Funzioni strettamente banda-limitate con $B_\omega < \pi/T$

Ripetendo $X(\omega)$ ogni $2\pi/T$ restano **buchi** tra una replica e l'altra in cui la somma è zero. Non può diventare una costante non nulla. **Impossibile** soddisfare la condizione.

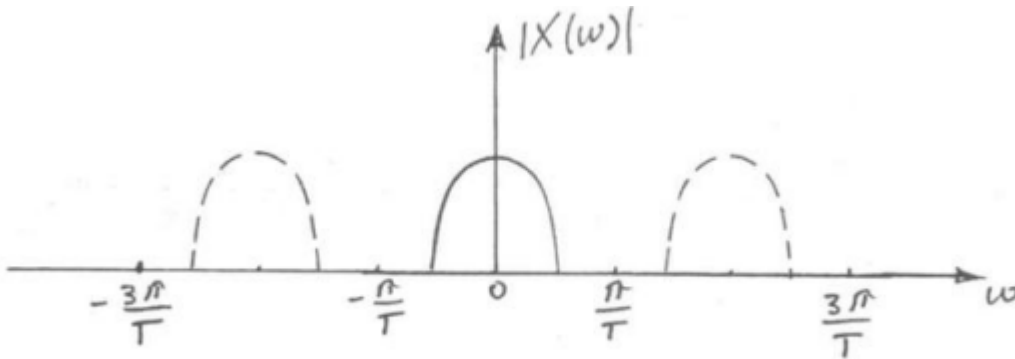
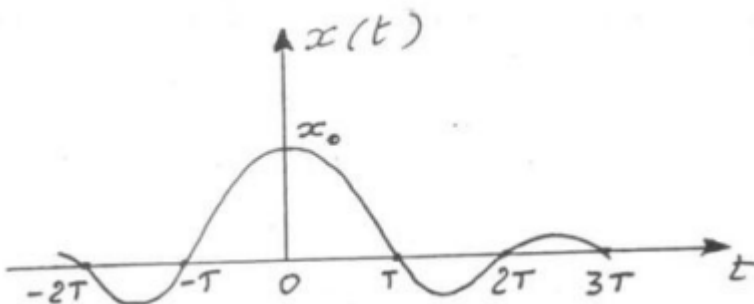


Fig. 2.8.3



II) Funzioni con banda esattamente $B_\omega = \pi/T$

La condizione si può soddisfare **se e solo se** $X(\omega)$ riempie esattamente un intervallo di ampiezza $2\pi/T$ con valore costante x_0T :

$$X(\omega) = \begin{cases} x_0T, & |\omega| \leq \pi/T \\ 0, & |\omega| > \pi/T \end{cases}$$

Le repliche adiacenti si **toccano** senza buchi né sovrapposizioni: la somma periodica vale sempre x_0T . Nel tempo:

$$x(t) = x_0 \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

(sinc centrata).

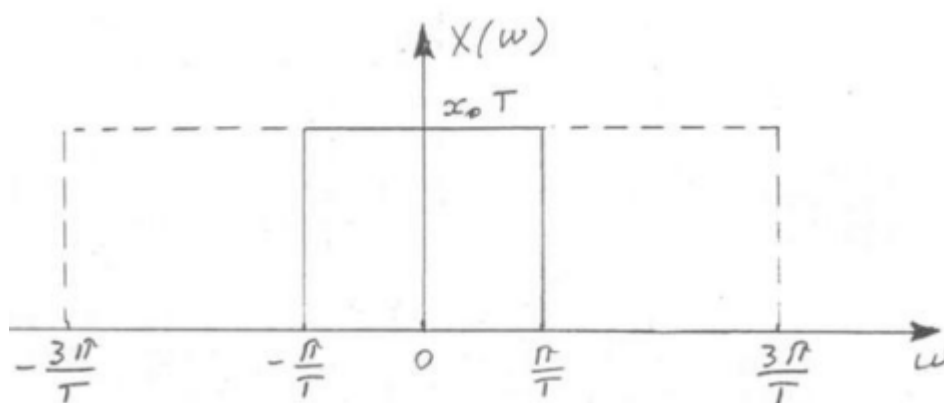


Fig. 2.8.4

III) Funzioni con banda $B_\omega > \pi/T$

Si può ancora soddisfare la condizione scegliendo $X(\omega)$ in modo che le **repliche si sovrappongano** e la loro somma faccia una **piatta** x_0T (es. raccordi continui antisimmetrici ai bordi). In pratica, ciò che una replica "toglie" un'altra lo "rimette", e l'**accumulo totale** è costante.

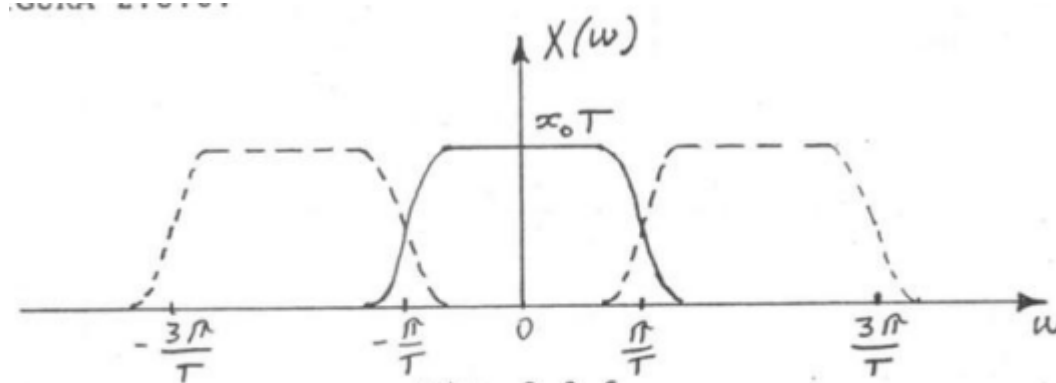


Fig. 2.8.6

Intuizione in 10 secondi

- Vogliamo che la sequenza dei campioni sia $x_0 \delta[n] \Rightarrow$ la sua trasformata **deve** essere piatta.
- Ma la trasformata della sequenza è la **somma periodica** di $X(\omega)$.
- Quindi dobbiamo **disegnare** $X(\omega)$ in modo che, quando la **tappezzi** ogni $2\pi/T$, la somma faccia **sempre la stessa quota** $x_0 T$.
- Con banda $< \pi/T$ non ci arriverai mai (ci sono buchi); con banda $= \pi/T$ ci arrivi con un **rettangolo**; con banda $> \pi/T$ ci arrivi facendo **sovrapporre** le repliche così da livellare tutto.

Riassunto Chat per disperati:

Ok, terra-terra.

- Vogliamo che i campioni siano tutti **zero** tranne quello in $t = 0$ (che vale x_0). Questa sequenza, in frequenza, è **piatta**: nessun picco, nessuna buca. Solo una riga **orizzontale**.
 - **Riga orizzontale** = spettro **costante** in funzione di ω .
Succede quando nel **tempo** hai un **impulso** (delta).
Esempio: $x(t) = \delta(t); \Rightarrow; X(\omega) = 1$ (piatto orizzontale).
 - **Riga verticale** = **impulso di Dirac in frequenza** (energia concentrata in UNA frequenza).
Succede quando nel **tempo** hai una **costante** o una **sinusoide** pura.
Esempi:
 - $x(t) = C; \Rightarrow; X(\omega) = 2\pi C, \delta(\omega)$ (spike verticale in 0);
 - $x(t) = \cos \omega_0 t; \Rightarrow; X(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$ (due spike verticali in $\pm\omega_0$).

Riassunto lampo (tempo \leftrightarrow frequenza):

- **Impulso nel tempo** $\delta(t) \leftrightarrow$ **piatto orizzontale** $X(\omega) = 1$.
- **Costante nel tempo** $C \leftrightarrow$ **spike verticale** in $\omega = 0$.
- **Sinusoide** \leftrightarrow **due spike verticali** in $\pm\omega_0$.
- Quando campioni una $x(t)$ ogni T , quello che succede **in frequenza** è: prendi lo spettro $X(\omega)$ e lo **copi infinito volte** affiancato ogni $2\pi/T$, poi **sommi** tutte queste copie punto per punto. (Pensa a tappezzare il muro con la stessa striscia ripetuta e poi guardare l'altezza totale in ogni punto.)
- Per ottenere la sequenza "tutti zero tranne il centro", la **somma** di queste copie deve venire **sempre uguale** (una linea piatta). Tutto qui.

Cosa ne esce:

1. **Banda stretta** $B_\omega < \pi/T$

Le copie non si toccano: restano **buchi** tra una e l'altra. Se sommi, in quei buchi ottieni **zero** e altrove qualcosa >0 . Non potrà mai essere una linea piatta diversa da zero. → **Impossibile**.

2. **Banda giusta** $B_\omega = \pi/T$

Le copie si **sfiorano** senza sovrapporsi. Se fai $X(\omega)$ a **rettangolo** alto x_0T largo $2\pi/T$, la somma delle copie è **esattamente piatta**. Nel tempo questo è la **sinc** (quel lobo centrale con code). → **Funziona**.

3. **Banda larga** $B_\omega > \pi/T$

Le copie si **sovrappongono**. Puoi "sagomare" $X(\omega)$ in modo che dove una copia scende, l'altra sale, e la **somma** resti **piatta**. → **Si può fare**, ma devi disegnare $X(\omega)$ con i bordi "a compensazione".

Immagine mentale: hai strisce di moquette identiche (le copie di X). Le incolli sul pavimento a passo fisso $2\pi/T$ e poi misuri l'altezza totale. Per avere un pavimento **piatto**:

- se le strisce sono troppo **strette** (banda $< \pi/T$) restano spazi vuoti → mai piatto;
- se la larghezza è **giusta** (banda $= \pi/T$) basta una striscia **rettangolare** → piatto;
- se sono **larghe** (banda $> \pi/T$) devi ritagliare i bordi così che le sovrapposizioni si compensino → ancora piatto.

Fine.

Super riassunto super disperato

Che cavolo stiamo facendo

Vogliamo **campionare** un segnale ogni T secondi e ottenere questa sequenza:

- tutti i campioni = **0**
- tranne **quello in** $t = 0$ che vale x_0 (Nota mia: o $t=n$ vale x_n ?)

Tradotto umano: vuoi che il tuo campionatore "senta" **solo un colpo al centro** e silenzio su tutti gli altri multipli di T .

Come si ottiene sta cosa

C'è un segnale nel tempo che fa esattamente questo: la **sinc** centrata e scalata giusta. Quella con la gobba in mezzo e **zeri perfetti** in $\pm T, \pm 2T, \pm 3T, \dots$

- Scegli $x(t) = x_0 \text{sinc}(t/T)$ (forma a campana con zeri ai multipli di T).
- Se lo campioni ai tempi nT , ottieni:

- $x(0) = x_0$
- $x(nT) = 0$ per $n \neq 0$

Boom: **la sequenza che volevi.**

Perché parliamo di frequenza allora? Perché quella sinc, in **frequenza**, è un **rettangolo**: piatto alto x_0T largo $2\pi/T$ attorno a $\omega = 0$.

Perché tutto il casino delle “repliche” in frequenza

Quando campioni nel tempo ogni T , in **frequenza** succede questo: **copi e incoll**i lo spettro $X(\omega)$ infinite volte, distanziate di $2\pi/T$, e poi **le sommi**.

Se vuoi che i campioni escano “solo il centrale $\neq 0$ ”, quella somma deve venire **uguale ovunque** (una riga orizzontale).

Con il **rettangolo** (lo spettro della sinc):

- le copie si mettono una di fianco all'altra **giuste giuste** (larghezza $2\pi/T$),
- e la somma risulta **piatta**. Fine della storia.

Esempio umano, versione “suono”

Pensa a un click audio (tac!) costruito apposta:

- Nel tempo: un colpo con una forma speciale (la sinc) che **va a zero** esattamente ogni T secondi.
- Se ascolti solo agli istanti $0, \pm T, \pm 2T, \dots$ senti:
 - **tac** a 0,
 - **silenzio** in tutti gli altri.
- In frequenza: l'equalizzatore mostra una **banda piatta** tra $-\pi/T$ e π/T (rettangolo). Quando campioni, replichi quella banda a passi $2\pi/T$, e la somma rimane **piatta** → **campioni come volevi**.

Tre casi in 10 secondi (per capire i disegni del prof)

- **Banda troppo stretta** $B_\omega < \pi/T$: le copie **non si toccano**, restano **buchi** → la somma non può mai essere piatta non-zero → **impossibile** ottenere “solo il centro $\neq 0$ ”.
- **Banda giusta** $B_\omega = \pi/T$: scegli **rettangolo** → le copie si **sfiorano** senza sovrapporsi → somma **piatta** → **funziona** (è la sinc).
- **Banda larga** $B_\omega > \pi/T$: le copie **si sovrappongono**; puoi sagomare $X(\omega)$ per far sì che la **somma** resti **piatta** (bordini che si compensano). Più flessibile, ma va disegnata bene.

14) Calcolare il ritardo medio di TDMA e FDMA e commentare il loro confronto

FDMA vs TDMA — ritardo medio (spiegazione corta ma chiara)

Setup (gli assunti che NON puoi ignorare)

- M utenti/canali/slot, sempre in uso (saturazione).
- Ogni pacchetto ha b bit.
- Bit-rate totale del sistema R .
- In FDMA: la banda si divide in M sottobande \Rightarrow ogni utente ha R/M fisso per tutto il tempo.
- In TDMA: tutta la banda R ma solo per $1/M$ del tempo (uno slot per frame).
- Definisco il **tempo per trasmettere b bit con tutta la banda**: b/R .
Impongo $T \triangleq Mb/R$ (tempo "di riferimento" del prof: il tempo che serve in FDMA a mandare un pacchetto, vedi sotto).

Il ritardo di un pacchetto è $D = w + \tau$

dove w = attesa prima di iniziare a trasmettere, τ = tempo di trasmissione.

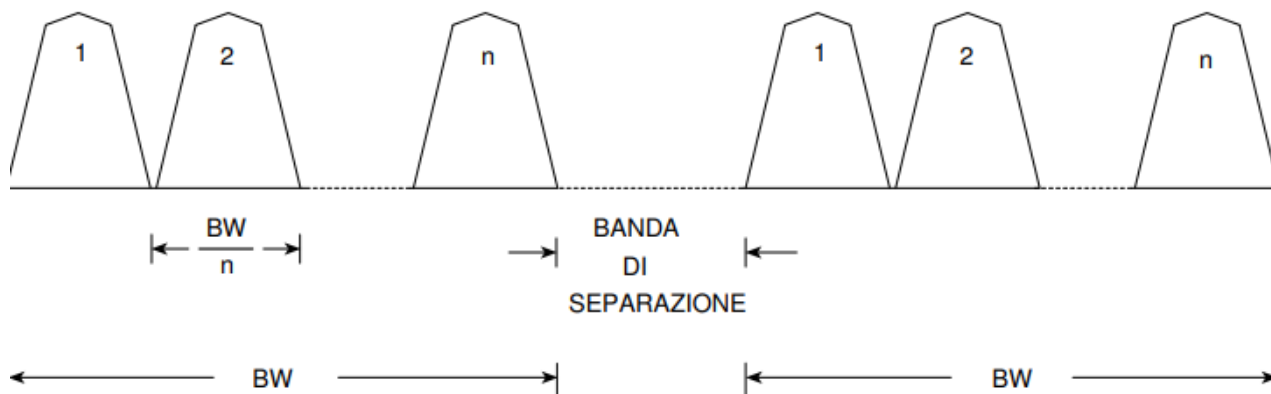
FDMA (Frequency Division Multiple Access)

- Trasmissione a rate R/M **senza attese** (canale dedicato).
- Tempo di trasmissione per b bit:

$$\tau_{FD} = \frac{b}{R/M} = \frac{Mb}{R} = T$$

- Attesa media: $w_{FD} = 0$ (stai sempre sul tuo canale).
- **Ritardo medio**:

$$D_{FD} = w_{FD} + \tau_{FD} = T$$



TDMA (Time Division Multiple Access)

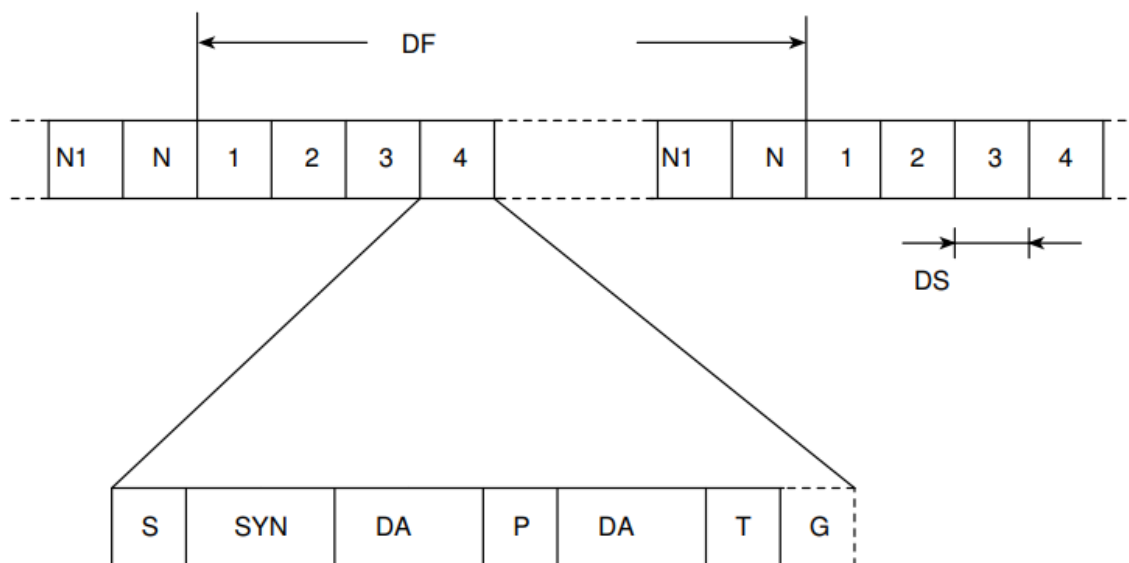
- Quando tocchi a te hai tutta la banda R , ma solo per il tuo slot.
- Tempo di trasmissione:

$$\tau_{TD} = \frac{b}{R} = \frac{T}{M}$$

- Attesa media per l'inizio dello slot (uniforme tra 0 e $(M - 1) T/M$):

$$w_{TD} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (m - 1) \frac{T}{M} = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{1}{M}\right)$$

Intuizione: in media arrivi "a metà frame degli altri".



- **Ritardo medio:**

$$D_{TD} = w_{TD} + \tau_{TD} = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{1}{M}\right) + \frac{T}{M} = T - \frac{T}{2} \left(1 - \frac{1}{M}\right)$$

Forma equivalente (a volte più leggibile):

$$D_{TD} = \frac{T}{2} \left(1 + \frac{1}{M}\right)$$

Confronto secco

- $D_{FD} = T$
- $D_{TD} = T - \frac{T}{2} \left(1 - \frac{1}{M}\right) = \frac{T}{2} \left(1 + \frac{1}{M}\right)$

Quindi

$$D_{TD} < D_{FD} \quad \text{per ogni } M \geq 2.$$

Edge cases utili:

- $M = 1$: $D_{TD} = D_{FD} = T$ (ovvio, c'è un solo utente).
 - $M \rightarrow \infty$: $D_{TD} \rightarrow T/2$ (attendi ~mezzo frame; trasmissione è istantanea rispetto al frame).
-

Perché TDMA “vince” qui (intuizione)

- In FDMA **non aspetti**, ma trasmetti lentamente (R/M) $\Rightarrow \tau$ grande ($= T$).
 - In TDMA **aspetti un po'** (in media mezzo frame degli altri), ma quando parti hai tutta la banda $\Rightarrow \tau$ piccolo ($= T/M$).
 - La riduzione di τ in TDMA batte l'attesa media $w \Rightarrow$ ritardo totale minore.
-

Cosa stiamo ignorando (nella vita reale pesa)

- Overhead TDMA: preamboli, guard-time, sincronismi, slot vuoti $\Rightarrow w$ effettivo cresce.
 - Overhead FDMA: guard-bands tra canali \Rightarrow efficienza spettrale cala, ma il **ritardo** resta T nel modello.
 - Traffico non sempre saturo: con traffico bursty TDMA può assegnare più slot \Rightarrow ritardo ancora migliore; FDMA resta inchiodato alla sua $\tau = T$.
 - Propagazione/queuing non inclusi.
-

Mini-esempio numerico lampo

- $M = 4$. Allora:

$$D_{FD} = T, \quad D_{TD} = \frac{T}{2} \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8}T$$

TDMA taglia il ritardo del **37.5%** rispetto a FDMA.

Numeri concreti (così lo vedi):

- Totale banda $R = 10$ Mbit/s, $M = 5$ utenti, pacchetto $b = 1$ Mbit.
Allora $T = Mb/R = 5 \cdot 1/10 = 0.5$ s.

FDMA

- Niente attesa.
- Servizio a $R/M = 2$ Mbit/s $\Rightarrow 1/2 = 0.5$ s.
- Totale: **0.50 s**.

TDMA

- Frame $T = 0.5$ s con 5 slot da 0.1 s.
- Attesa media fino al TUO prossimo slot:
 $(M - 1)/2 \cdot T/M = 4/2 \cdot 0.5/5 = 0.2$ s.
- Servizio a tutta banda: $1/10 = 0.1$ s.
- Totale: **0.2 + 0.1 = 0.30 s**.

Vedi perché **non è uguale**? Hai aspettato 200 ms, sì, ma quando trasmetti bruci il pacchetto in 100 ms. Il totale (300 ms) è **molto meno** dei 500 ms di FDMA.

Se vuoi la “regola da tasca”:

- FDMA: sempre T .
- TDMA: $T/2 + T/M$ (uguale a $\frac{T}{2}(1 + 1/M)$).
Per $M \geq 2$, $T/2 + T/M < T \Rightarrow$ **TDMA vince**.

Quindi l'errore intuitivo sta qui: **stessa banda media \neq stesso ritardo**. Concentrando la banda, **accorci il tempo di servizio di un pacchetto di un fattore M** , e l'attesa media che introduci **non arriva a compensare** quel taglio (si ferma intorno a $T/2$).

Definire la funzione impulsiva e calcolarne la trasformata secondo Fourier

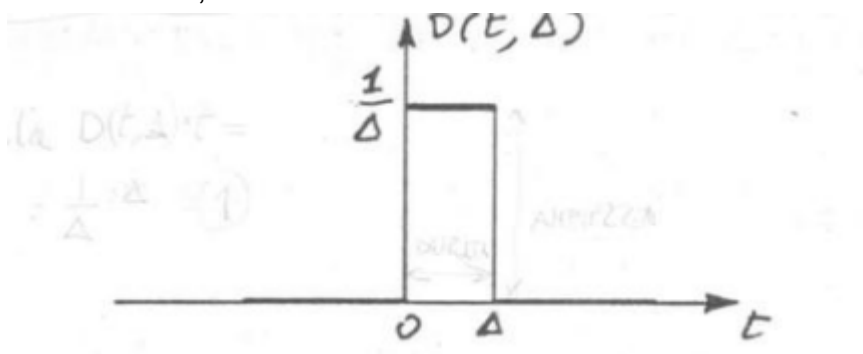
libro 2.14, pdf: 86

1. costruire il **Dirac** come limite di un rettangolino con **area 1**,
2. dedurre la **proprietà di campionamento** (sifting),
3. ricavare la **CTFT** della delta,
4. mostrare che una funzione continua si può scrivere come "somma/integrale di impulsi".

Funzione impulsiva e trasformata di Fourier

1) Definizione della funzione impulsiva

Si definisce una funzione $D(t - a, \Delta)$ come un rettangolo di **larghezza** Δ , **altezza** $1/\Delta$, e **area unitaria**, centrato in $t = a$:



$$D(t - a, \Delta) = \{1/\Delta \text{ per } a - \Delta/2 \leq t \leq a + \Delta/2, 0 \text{ altrove}\}$$

La **funzione delta di Dirac** è il limite di questo impulso per $\Delta \rightarrow 0$:

$$\delta(t - a) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} D(t - a, \Delta)$$

e soddisfa la **proprietà di campionamento**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - a) dt = x(a)$$

2) Espressione simbolica e proprietà

Qualsiasi funzione continua $x(t)$ può essere scritta come una "somma continua" di impulsi:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

equivalente a una convoluzione con $\delta(t)$:

$$x(t) = (x * \delta)(t)$$

con $*$ non come "per", ma come convoluzione.

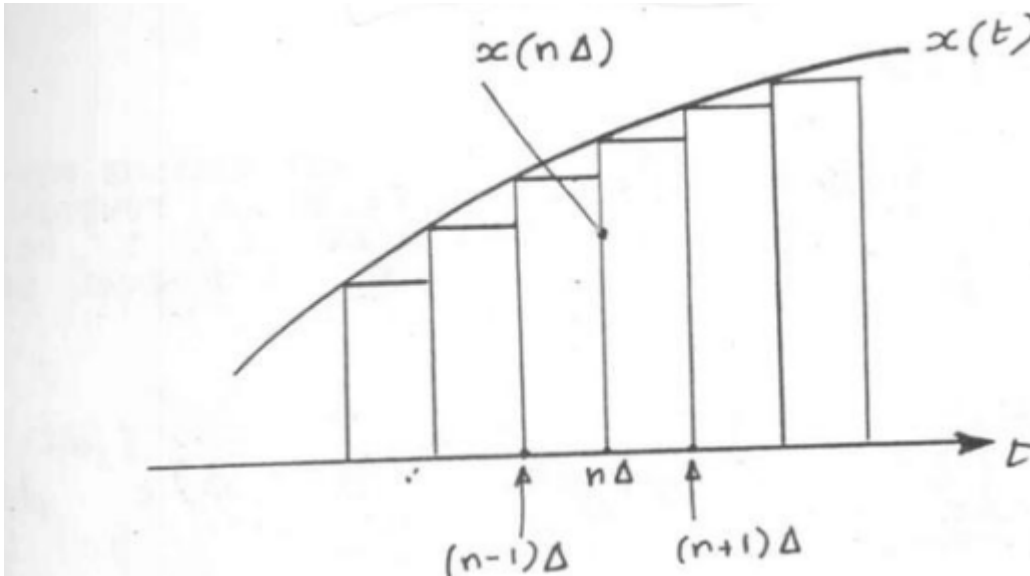
3) Interpretazione geometrica (rettangoli di Riemann)

Approssimando $x(t)$ con rettangoli di base Δ e altezza $x(n\Delta)$:

$$x(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta) \Delta D(t - n\Delta, \Delta)$$

Mandando $\Delta \rightarrow 0$ si ottiene l'integrale continuo precedente.

Questo mostra che $x(t)$ può essere vista come una **somma di impulsi infinitesimi** $x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$.



4) Trasformata di Fourier della delta

Usando la convenzione

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

si ha:

$$\mathcal{F}\{\delta(t - a)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega a}$$

e in particolare:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$$

5) Verifica tramite limite del rettangolo

La trasformata di Fourier dell'impulso rettangolare $D(t - a, \Delta)$ (ampiezza $1/\Delta$ e durata Δ) è:

1) Dimostrare e descrivere il teorema del campionamento nel dominio dei tempi

$$\mathcal{F}\{D(t - a, \Delta)\} = \text{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right) e^{-j\omega a}$$

dove $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Nel limite $\Delta \rightarrow 0$:

$$\text{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right) \rightarrow 1$$

quindi:

$$\mathcal{F}\{\delta(t - a)\} = e^{-j\omega a}$$

6) Riassunto finale

- $\int x(t) \delta(t - a) dt = x(a)$
- $x(t) = \int x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$
- $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$
- $\mathcal{F}\{\delta(t - a)\} = e^{-j\omega a}$

19) Funzione di trasferimento e caratteristiche di ampiezza e fase di una rete RC. Disegnarne i grafici

Rete RC passa-basso

Consideriamo la rete RC costituita da una **resistenza** R in serie e da un **condensatore** C collegato a massa.

L'ingresso V_x è applicato all'intera rete, mentre l'uscita V_y è la tensione ai capi del condensatore.

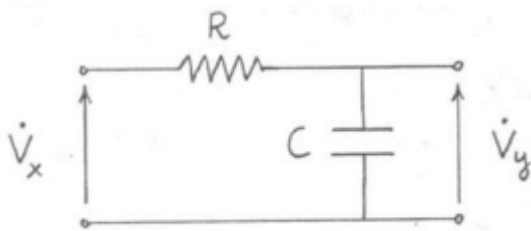


Fig. 3.1.6

Funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento si definisce come:

$$H(\omega) = \frac{V_y}{V_x}$$

Poiché l'impedenza del condensatore è $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$, si ha:

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Questa è la **funzione di trasferimento complessa** della rete RC passa-basso.

Modulo e fase

Il modulo (o **ampiezza**) di $H(\omega)$ è:

$$T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

La **fase** è invece:

$$\beta(\omega) = \arg(H(\omega)) = -\arctan(\omega RC)$$

(negativa perché la corrente attraverso il condensatore anticipa la tensione).

Analisi del comportamento

- Per $\omega \rightarrow 0$ (basse frequenze):

$$T(\omega) \rightarrow 1 \text{ e } \beta(\omega) \rightarrow 0$$

→ Il condensatore si comporta come un circuito aperto: passa quasi tutto il segnale.

- Per $\omega \rightarrow \infty$ (alte frequenze):

$$T(\omega) \rightarrow 0 \text{ e } \beta(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

→ Il condensatore si comporta come un corto circuito: il segnale in uscita tende a zero.

Frequenza di taglio

La **frequenza di taglio** ω_c è definita come il punto in cui l'ampiezza scende a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ del valore massimo:

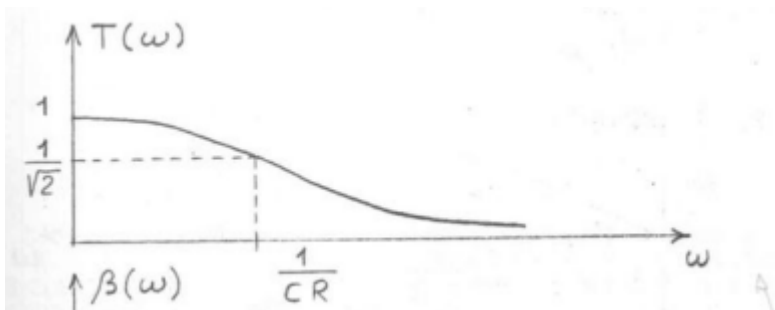
$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

In tale punto, la fase vale:

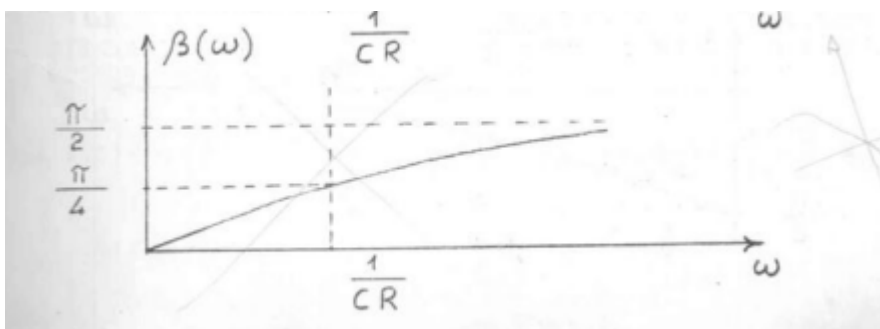
$$\beta(\omega_c) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

Grafici caratteristici

- **Modulo $T(\omega)$:**
decrece da 1 a 0 al crescere di ω , con pendenza progressiva e valore $\frac{1}{\sqrt{2}}$ in corrispondenza di ω_c .



- **Fase $\beta(\omega)$:**
passa da 0 a $-\frac{\pi}{2}$, attraversando $-\frac{\pi}{4}$ in corrispondenza di ω_c .



Riassunto

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

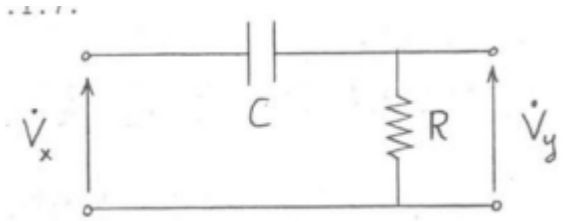
$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad \beta(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

La rete RC si comporta come **filtro passa-basso del primo ordine**, che lascia passare le frequenze basse e attenua progressivamente quelle alte.

20) Funzione di trasferimento e caratteristiche di ampiezza e fase di una rete CR. Disegnarne i grafici

Rete CR passa-alto

Schema: **condensatore C in serie**, resistenza R a massa, uscita V_y ai capi di R ; ingresso V_x ai capi dell'intera rete.



Funzione di trasferimento

$$H(\omega) = \frac{V_y}{V_x} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}$$

È un **filtro passa-alto del I ordine**.

Modulo e fase

$$T(\omega) = |H(\omega)| = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\beta(\omega) = \arg H(\omega) = \arctan(\omega CR) - \frac{\pi}{2} = -\arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$$

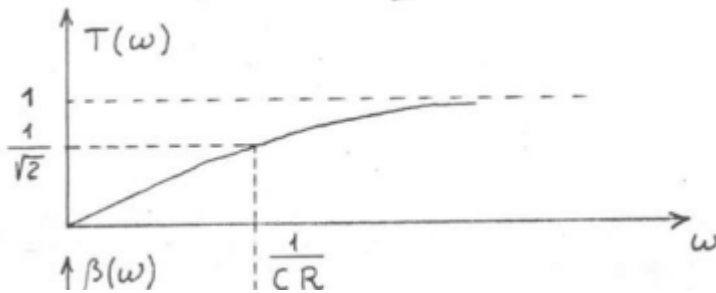
Frequenza di taglio e valori notevoli

$$\omega_c = \frac{1}{CR}$$

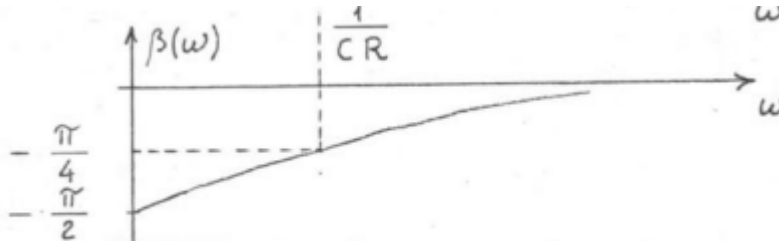
- $\omega \ll \omega_c$:
 $T(\omega) \approx \omega CR$ (pendenza +20 dB/dec), $\beta(\omega) \approx -\frac{\pi}{2}$.
 - $\omega = \omega_c$:
 $T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta(\omega) = -\frac{\pi}{4}$.
 - $\omega \gg \omega_c$:
 $T(\omega) \rightarrow 1$, $\beta(\omega) \rightarrow 0$.
-

Grafici caratteristici

- **Ampiezza** $T(\omega)$: cresce da 0 a 1, con $1/\sqrt{2}$ a ω_c .



- **Fase** $\beta(\omega)$: da $-\pi/2$ a 0, passando per $-\pi/4$ a ω_c .



Riassunto compatto

$$H(\omega) = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}, \quad T(\omega) = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}, \quad \beta(\omega) = \arctan(\omega CR) - \frac{\pi}{2}.$$

Calcolare lo spettro di un segnale PAM con codice AMI, cifre binarie prima della codifica equiprobabili, impulsi rettangolari con ampiezza unitaria e duty cycle 0.5s

(pagina 215)

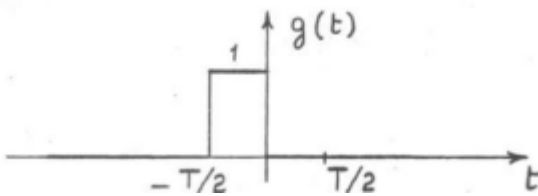
Spettro di un PAM con codice AMI, impulsi rettangoli unitari, duty-cycle 0.5

Modello del segnale

Segnale PAM:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t - nT)$$

- $g(t)$ è un rettangolo centrato in 0 di **durata** $\tau = T/2$ e **ampiezza 1** (duty-cycle 0.5)



- Codice **AMI**: i "1" alternano il segno +1/ - 1, gli "0" diventano 0.
Con cifre binarie equiprobabili e indipendenti:

$$E\{a_n\} = 0, \quad E\{a_n^2\} = \frac{1}{2}$$

PSD di un PAM

Per un PAM stazionario:

$$G_s(\omega) = \frac{1}{\pi T} |G(\omega)|^2 \underbrace{\left\{ E[a_n^2] - E[a_n]^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (E[a_n a_{n-k}] - E[a_n]^2) \cos(k\omega T) \right\}}_{\text{spettro discreto dei campioni } a_n}$$

Per l'**AMI** (risultato standard dell'es. precedente / come nel foglio del prof):

$$E[a_n] = 0, \quad E[a_n a_{n-k}] = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ -\frac{1}{4} & k = \pm 1 \\ 0 & |k| \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\omega T) = \sin^2 \frac{\omega T}{2}}$$

Quindi:

$$G_s(\omega) = \frac{1}{\pi T} |G(\omega)|^2 \sin^2 \frac{\omega T}{2}$$

Trasformata dell'impulso rettangolo $g(t)$

Con $\tau = T/2$, $g(t) = 1$ per $t \in [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] = [-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}]$:

$$G(\omega) = \int_{-T/4}^{T/4} e^{-j\omega t} dt = \frac{2 \sin(\omega T/4)}{\omega}$$

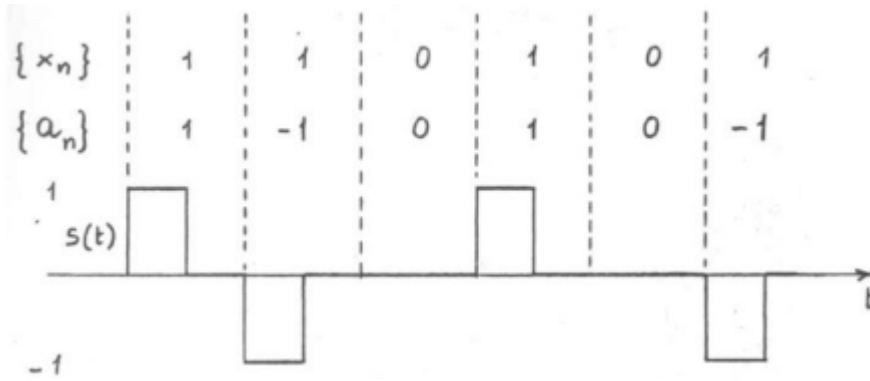
$$\Rightarrow |G(\omega)|^2 = \left(\frac{2 \sin(\omega T/4)}{\omega} \right)^2 = \frac{T^2}{4} \left(\frac{\sin(\omega T/4)}{\omega T/4} \right)^2$$

Risultato finale

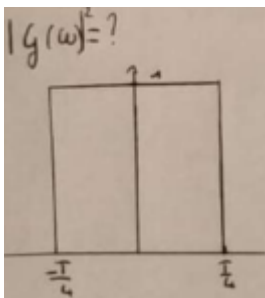
$$\boxed{G_s(\omega) = \frac{T}{4\pi} \left(\frac{\sin(\omega T/4)}{\omega T/4} \right)^2 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}$$

Lettura fisica (perché ha senso)

- **Nessuna riga a DC:** $E[a_n] = 0 \Rightarrow \sin^2(\omega T/2)$ ha uno zero in $\omega = 0$.



- **Nulli periodici** ogni $\omega = 2k\pi/T$ (fattore $\sin^2(\omega T/2)$ tipico dell'AMI \rightarrow "sopprime" basse frequenze e impone nulli ai multipli del rate simbolico).
- **Inviluppo** sinc^2 dato dal rettangolo (fattore $(\sin(\omega T/4)/(\omega T/4))^2$); piú l'impulso è **largo**, piú lo spettro è **stretto**.



Riassunto ultra-breve

PSD del PAM-AMI = PSD dell'impulso rettangolo \times "maschera AMI".

Rettangolo $\Rightarrow (\sin(\omega T/4)/(\omega T/4))^2$;

AMI $\Rightarrow \sin^2(\omega T/2)$.

Moltiplicando e scalando per $T/(4\pi)$ ottieni esattamente la formula sopra (come nel foglio del prof).

22) Si consideri un apparato di interconnessione a cui giungono destinati verso la stessa linea di uscita 100000 flussi che portano in media 30 pacchetti al minuto. si vuole che il pacchetto rimanga nel sistema meno di 1ms con probabilità almeno 0.95

Apparato di interconnessione – dimensionamento μ e buffer (M/M/1/K)

Dati

- Flussi in ingresso: 100 000

- Traffico medio per flusso: 30 pacchetti/minuto
- Soglia di permanenza nel sistema: 1 ms con probabilità almeno 0.95
- Probabilità di perdita richiesta: $< 10^{-6}$

Modellazione

Usiamo una coda **M/M/1** per il dimensionamento del rate di servizio e una **M/M/1/K** per la perdita dovuta a buffer finito.

Arrivo complessivo:

$$\lambda = 100\,000 \cdot \frac{30}{60} \text{ pac/s} = 50\,000 \text{ pac/s}$$

1) Rate minimo del processore μ

Per M/M/1, il **tempo di sojourn** T (attesa + servizio) è esponenziale con parametro $(\mu - \lambda)$, quindi

$$\mathbb{P}\{T \leq t\} = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t}, \quad t \geq 0.$$

Richiediamo $\mathbb{P}\{T \leq 1 \text{ ms}\} \geq 0.95$:

$$1 - e^{-(\mu-\lambda) \cdot 0.001} \geq 0.95 \Rightarrow e^{-(\mu-\lambda) \cdot 0.001} \leq 0.05 \Rightarrow \mu - \lambda \geq \frac{-\ln 0.05}{0.001} \approx 2996 \text{ s}^{-1}.$$

Quindi

$$\mu_{\min} \approx \lambda + 2996 \approx 50\,000 + 3\,000 \approx 53\,000 \text{ pac/s}.$$

Risposta 1: il processore deve trattare **almeno** 53 000 pac/s.

2) Dimensione del buffer d'uscita per perdita $< 10^{-6}$

Dopo aver fissato $\mu = 53\,000 \text{ pac/s}$:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{50\,000}{53\,000} \approx 0.9434.$$

Con buffer finito **M/M/1/K**, dove K è il **numero di posti nel buffer** e il sistema ha **capacità totale** $K + 1$ includendo il server, la probabilità stazionaria di sistema pieno (e quindi di **blocco per PASTA**) è

$$p_{K+1} = \frac{(1 - \rho) \rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+2}}.$$

Vogliamo

$$p_{K+1} \leq 10^{-6}.$$

Per $\rho = 0.9434$ la ricerca del minimo K dà:

- $K = 150 \Rightarrow p_{K+1} \approx 5.25 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \text{NO}$
- $K = 175 \Rightarrow p_{K+1} \approx 1.12 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \text{ancora sopra}$
- $K = 177 \Rightarrow p_{K+1} \approx 9.38 \cdot 10^{-7} \Rightarrow \text{OK}$

Risposta 2: serve un **buffer di** $K = 177$ pacchetti (oltre al pacchetto in servizio) per avere probabilità di perdita $< 10^{-6}$.

Note/intuizioni chiave

- La condizione sul tempo di permanenza usa il **tail esponenziale** di T in M/M/1: maggiore è $(\mu - \lambda)$, più la CDF a 1 ms sale verso 1.
- Per la perdita in M/M/1/K, la formula è quella della **catena geometrica troncata**; con $\rho < 1$ il termine dominante è ρ^{K+1} , quindi la perdita decresce **esponenzialmente** con K ma serve comunque un buffer nell'ordine delle **centinaia** perché ρ è alto (carico al 94%).

Risoluzione da scimmie disperate:

Procedura “per scimmie” per questi esercizi (M/M/1 e M/M/1/K)

Non chiederti **cosa** stai calcolando. Segui i passi. Inserisci i numeri, premi =, vai avanti.

Input tipici

- N_{flussi} = numero di flussi in ingresso (es. 100 000)
 - r_{flusso} = pacchetti/minuto per flusso (es. 30/min)
 - Soglia tempo: t_{max} (es. 1 ms)
 - Probabilità richiesta sul tempo: p_T (es. 0.95)
 - Probabilità massima di perdita: p_{loss} (es. 10^{-6})
-

Step 0 — Conversioni veloci

Trasforma “al minuto” in “al secondo”, e ms in s:

1) Dimostrare e descrivere il teorema del campionamento nel dominio dei tempi
 $\text{per_sec}(x/\text{min}) = x/60$, $\text{in_sec}(\text{ms}) = \text{ms} \cdot 10^{-3}$.

Step 1 — Somma gli arrivi totali (tasso λ)

$$\lambda = N_{\text{flussi}} \cdot \frac{r_{\text{flusso}}}{60} \text{ [pac/s]}.$$

Esempio numeri:

$$\lambda = 100\,000 \cdot \frac{30}{60} = 50\,000 \text{ pac/s}.$$

Step 2 — Scegli la capacità di servizio minima (tasso μ)

Usa la formula **diretta**:

$$\mu = \lambda + \frac{-\ln(1 - p_T)}{t_{\text{max}}}.$$

Dove t_{max} è in **secondi** e \ln è log naturale.

Esempio numeri ($p_T = 0.95$, $t_{\text{max}} = 0.001$ s):

$$\mu = 50\,000 + \frac{-\ln(0.05)}{0.001} \approx 50\,000 + 2\,996 \approx 53\,000 \text{ pac/s}.$$

Se il risultato $\mu \leq \lambda$ hai sbagliato conversioni. Ricontrolla ms→s.

Step 3 — Calcola il carico ρ

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Esempio:

$$\rho = \frac{50\,000}{53\,000} \approx 0.9434.$$

Step 4 — Dimensiona il buffer K per la perdita desiderata

Modello: **M/M/1/K** (buffer con K posti in coda; totale sistema pieno = $K + 1$ con server).

Probabilità di perdita (blocco) a regime:

$$p_{\text{loss}}(K) = p_{K+1} = \frac{(1 - \rho) \rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+2}}.$$

4A — Stima iniziale “al volo” (opzionale ma comoda)

Ignora il denominatore $1 - \rho^{K+2} \approx 1$ e risolvi

$$(1 - \rho) \rho^{K+1} \leq p_{\text{loss}}.$$

Isola K :

$$K_{\text{grezzo}} \approx \left\lceil \frac{\ln(p_{\text{loss}}) - \ln(1 - \rho)}{\ln(\rho)} \right\rceil - 1.$$

Questo ti dà un **primo tentativo**.

4B — Rifornisci con la formula esatta

Parti da $K = K_{\text{grezzo}}$ e:

1. calcola $p_{\text{loss}}(K)$ con la formula completa;
2. se $p_{\text{loss}}(K) > \text{target}$, aumenta K e ripeti;
3. fermati al **primo** K che soddisfa $p_{\text{loss}}(K) \leq \text{target}$.

Esempio con i numeri:

- $\rho = 0.9434$, target 10^{-6}
- Prove veloci:
 - $K = 150 \Rightarrow p \approx 5.25 \cdot 10^{-6}$ NO
 - $K = 175 \Rightarrow p \approx 1.12 \cdot 10^{-6}$ NO (di poco)
 - $K = 177 \Rightarrow p \approx 9.38 \cdot 10^{-7}$ OK

Risultato: $K = 177$ pacchetti in coda (oltre al pacchetto in servizio).

Output finale (riassunto da consegnare)

- Tasso arrivo:

$$\lambda = N_{\text{flussi}} \cdot \frac{r_{\text{flusso}}}{60}$$

- Tasso servizio minimo:

$$\mu = \lambda + \frac{-\ln(1 - p_T)}{t_{\max}}$$

- Carico:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

- Buffer minimo K tale che:

$$\frac{(1 - \rho) \rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+2}} \leq p_{\text{loss}}$$

Check-list “idiota-safe”

- Unità: minuti→secondi, ms→secondi.
- μ **maggiore** di λ .
- $\rho \in (0, 1)$.
- Per la perdita, **usa la formula esatta** alla fine; l'approssimazione serve solo per partire vicino.

Calcolare e disegnare gli spettri di ampiezza e fase di un impulso rettangolare di ampiezza A e durata τ

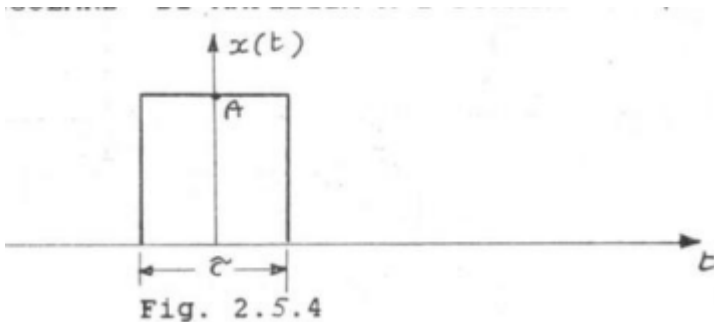
(pagina 44)

Impulso rettangolare: spettro di ampiezza e fase

Consideriamo il segnale:

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{se } |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È un segnale **tempo-continuo**, **aperiodico**, e a **valori discreti** (solo 0 o A).



Trasformata di Fourier

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Poiché $x(t)$ vale A solo tra $-\tau/2$ e $\tau/2$:

$$X(\omega) = A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt$$

L'integrale è:

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{2 \sin(\omega\tau/2)}{\omega}$$

Quindi:

$$X(\omega) = A \cdot \frac{2 \sin(\omega\tau/2)}{\omega}$$

A volte si riscrive così, più pulito:

$$X(\omega) = A\tau \cdot \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

Riconoscendo la **funzione sinc** normalizzata:

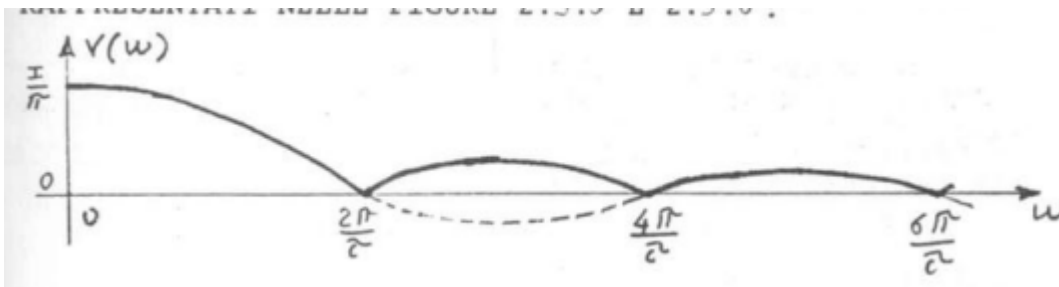
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Otteniamo:

$$X(\omega) = A\tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Spettro di ampiezza

$$V(\omega) = |X(\omega)| = A\tau \text{ sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



Spettro di fase

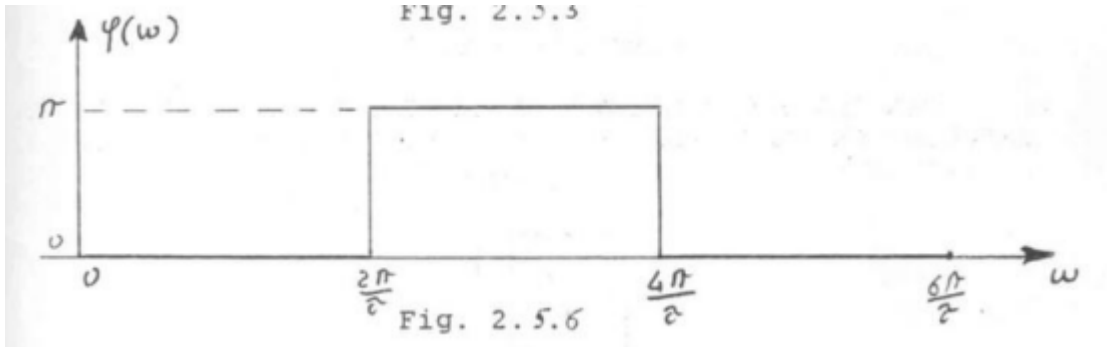
Il segnale è **simmetrico** attorno a $t = 0 \rightarrow X(\omega)$ è **reale e pari**.

Quando $\sin(\omega\tau/2)$ è positivo, $X(\omega) > 0 \rightarrow$ fase 0.

Quando la sinusoide è negativa, $X(\omega) < 0 \rightarrow$ fase salta a π .

Quindi:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & X(\omega) > 0 \\ \pi & X(\omega) < 0 \end{cases}$$



Interpretazione intuitiva

- Nel tempo hai un **"blocco"** di ampiezza **A**.
- In frequenza ottieni una **sinc**: ha un **lobo principale** e **lobi laterali** decrescenti.
- La **fase è banale**: solo 0 quando il segnale dello spettro è positivo e π quando è negativo.

Distribuzione di Poisson

Distribuzione di Poisson: superposizione, scomposizione, tempi di arrivo e tempo residuo

Modello base

- Processo di Poisson con frequenza di arrivo (tasso) $\lambda > 0$.
- Numero di arrivi in $[0, t]$: variabile $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

$$\mathbb{P}\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- **λ (lambda): il ritmo medio di arrivo.** Unità: "arrivi per secondo/minuto/ora". Esempio: 6/min $\rightarrow \lambda=6/\text{min}$.
Dritta: $\lambda \cdot t$ è il numero medio atteso di arrivi nell'intervallo t .
- **t : la durata della finestra di osservazione** (o, nei grafici dell'esponenziale, il **tempo che stai aspettando**). Unità: secondi/minuti, coerente con λ .
- **k : il numero di arrivi contati** in quell'intervallo. È un intero: 0, 1, 2, ...
- Proprietà chiave: incrementi indipendenti e stazionari.

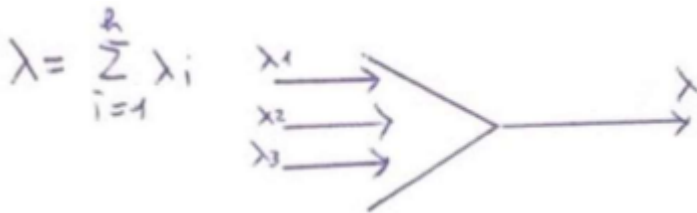
$$\mathbb{P}\{N(t+h) - N(t) = 0\} = 1 - \lambda h + o(h), \quad \mathbb{P}\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda h + o(h), \quad \mathbb{P}\{\geq 2\} = o(h)$$

Sovrapposizione (superposizione)

Se ho h processi di Poisson indipendenti con tassi $\lambda_1, \dots, \lambda_h$, la somma degli arrivi è ancora un processo di Poisson con

$$\lambda_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^h \lambda_i, \quad N_{\text{tot}}(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_{\text{tot}} t).$$

Idea della dimostrazione: la somma di variabili Poisson indipendenti è Poisson con parametro somma, e gli incrementi restano indipendenti/stazionari.



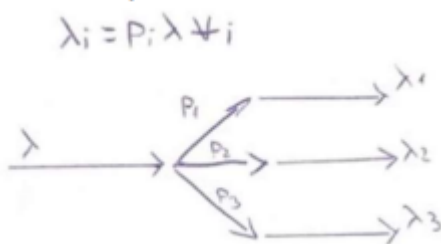
Scomposizione casuale (thinning / splitting)

Prendo un unico processo Poisson di tasso λ e assegno ogni arrivo alla classe $i \in \{1, \dots, H\}$ con probabilità p_i (indipendente, $\sum_i p_i = 1$).

Allora, per ciascuna classe:

$$N_i(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_i t), \quad \lambda_i = \lambda p_i,$$

e i processi $\{N_i(t)\}_i$ sono indipendenti tra loro.



Distribuzione del tempo tra arrivi (inter-arrival)

Sia T il tempo tra due arrivi successivi. Equivalenze standard:

$$\mathbb{P}\{T > t\} = \mathbb{P}\{\text{nessun arrivo in } (0, t]\} = \mathbb{P}\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}.$$

Quindi T è esponenziale:

$$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0), \quad \mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

//grafico: pdf esponenziale decrescente; accanto cdf che sale a 1

Proprietà di “assenza di memoria” (memoryless)

Per $T \sim \text{Exp}(\lambda)$:

$$\mathbb{P}\{T > t + s \mid T > s\} = \frac{\mathbb{P}\{T > t + s\}}{\mathbb{P}\{T > s\}} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}.$$

Interpretazione: se hai già atteso s , l'attesa aggiuntiva ha la stessa distribuzione di partenza.

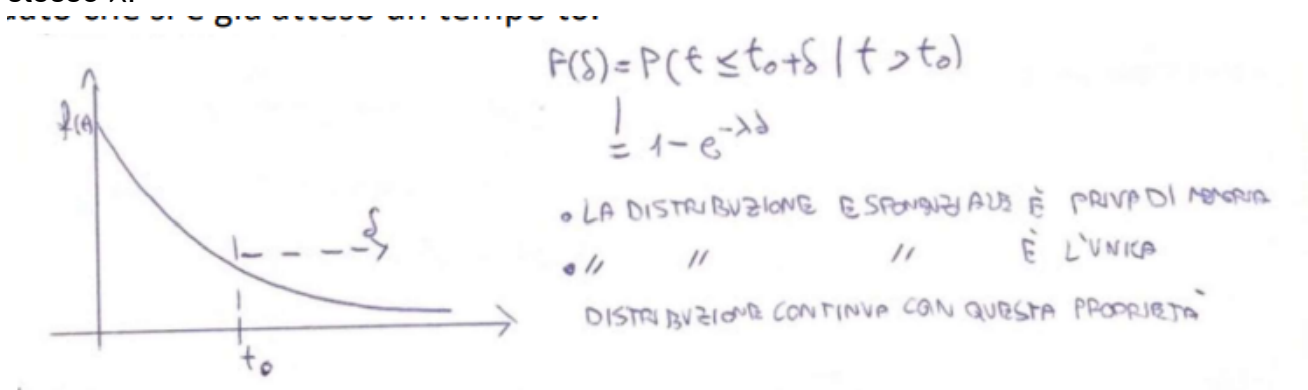
Tempo di attesa residuo (tempo “a partire da adesso”)

Sia R_s il tempo che manca al prossimo arrivo dato che fino a ora è passato s senza arrivi.

Per la proprietà memoryless:

$$R_s \stackrel{d}{=} \text{Exp}(\lambda), \quad \mathbb{P}\{R_s > t\} = \mathbb{P}\{T > t + s \mid T > s\} = e^{-\lambda t}, \quad \mathbb{E}[R_s] = \frac{1}{\lambda}.$$

Quindi il “residuo” non dipende da quanto hai già aspettato: è di nuovo esponenziale con lo stesso λ .



Riassunto operativo “da esercizi”

- Contare arrivi in t : usa $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$.
- Somma di processi: somma i tassi $\Rightarrow \lambda_{\text{tot}}$.
- Split casuale con probabilità p_i : ciascun ramo è Poisson con λp_i e i rami sono indipendenti.
- Tempo tra arrivi: $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- Tempo residuo dato “nessun arrivo fino a t_0 ”: ancora $\text{Exp}(\lambda)$ (assenza di memoria).

Riassunto ChatGPT

Il Contesto Corretto

La distribuzione di Poisson si usa per modellare il **numero di occorrenze** di un evento in un intervallo fisso (di tempo o spazio), quando queste condizioni sono soddisfatte:

1. **Eventi Indipendenti:** Il verificarsi di un evento non influenza la probabilità che se ne verifichi un altro.
 2. **Tasso Costante (Media):** Il tasso medio (λ) di occorrenza degli eventi è costante nell'intervallo.
 3. **Discretezza:** Gli eventi si contano come numeri interi (0, 1, 2, 3...).
- **Processo di Poisson = arrivi a caso ma con ritmo medio fisso.**
Pensa a chiamate al call center/pacchetti che arrivano: non sai *quando* arriva il prossimo, ma in media ne arrivano λ al secondo (il "ritmo").
 - **Sovrapposizione (superposizione).**
Se metti insieme più flussi "Poisson" indipendenti (es. chiamate che arrivano da 3 città diverse), il risultato è ancora Poisson. Il nuovo ritmo è la **somma** dei ritmi. Traduci: unisci code → diventa una coda unica che riceve più roba al minuto.
 - **Scomposizione (thinning/split).**
Se prendi un singolo flusso Poisson e **smisti** ogni arrivo in categorie (es. "guasti", "info", "commerciale") tirando a sorte con certe percentuali, ogni categoria, da sola, è ancora un flusso Poisson. Il suo ritmo = ritmo totale × percentuale di smistamento. Traduci: metti un filtro/etichetta a caso su ogni arrivo → ogni etichetta genera un flusso "pulito" che resta Poisson.
 - **Tempo tra arrivi (inter-arrival).**
L'attesa tra un arrivo e il successivo è **esponenziale**: molto probabile aspettare poco, sempre meno probabile aspettare tanto. In media aspetti **1/ritmo**. Traduci: se arrivano 10/min, in media aspetti 6 secondi.
 - **Assenza di memoria (memoryless).**
Non importa da quanto stai aspettando: la "prossima attesa" riparte sempre come nuova. Traduci: hai aspettato già 5 minuti? Non sei "più vicino". La probabilità per i prossimi 10 secondi è uguale a quella di chi inizia ora.
 - **Tempo residuo "da adesso".**
Se guardi l'orologio *ora* e chiedi: "quanto manca al prossimo arrivo?", la risposta ha **la stessa** logica dell'attesa normale. Traduci: il residuo non dipende dal passato.
 - **Quando ti serve in esercizi.**
 1. Se unisci flussi indipendenti → sommi i ritmi.
 2. Se dividi un flusso in rami casuali → ogni ramo ha ritmo "ritmo totale × percentuale", e i rami sono indipendenti.
 3. Se ti chiedono attese/"quanto manca" → pensa "esponenziale, senza memoria":
media = 1/ritmo.

Basta ricordare questi 3 mantra:

1. Unisci → sommi i ritmi.
2. Dividi a caso → ogni ramo resta Poisson col suo pezzo di ritmo.
3. Attese → esponenziale, niente memoria, media 1/ritmo.

Si abbia il seguente set di $k = 11$ bit da proteggere con un codice polinomiale durante una trasmissione: 10110101001 Utilizzando il polinomio generatore $G(x)$ ottenuto dal seguente set di 3 bit: 101 Si determini il polinomio T che viene trasmesso contenente i bit di ridondanza necessari per la rilevazione di eventuali errori da parte del ricevitore. Per ricavare l'espressione dei polinomi si assegni il grado dei termini leggendo i set di bit in modo decrescente da sinistra a destra.

Attenzione

Secondo ChatGPT, il tipo si è scordato di aggiungere 2 zeri in fondo al numero. L'esercizio quindi risulterebbe sbagliato.

CRC polinomiale – esercizio “ $k=11$, $G(x)=101$ ”

Hai 11 bit di dato: 10110101001 . Il generatore è a 3 bit: 101 , cioè $G(x) = x^2 + 1$ con grado $r = 2$. I bit si leggono da sinistra a destra con gradi decrescenti (il primo bit è il termine di grado massimo).

1) Mappa i bit a polinomi

Dato:

$$P(x) = x^{10} + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + 1$$

Generatore:

$$G(x) = x^2 + 1$$

2) Appendi $r = 2$ zeri (moltiplica per x^r)

In bit: 10110101001 → 1011010100100

In polinomiale: $x^2P(x)$.

3) Divisione lunga in GF(2)

Dividi $x^2P(x)$ per $G(x)$ facendo XOR quando il bit in testa è 1. Il resto deve avere grado $< r$.

Risultato:

$$R(x) = x + 1 \iff \text{resto} = 11$$

Nota: un resto tipo 100 (x^2) non sarebbe valido perché avrebbe grado $2 = \deg G$.

4) Parola trasmessa

$$T(x) = x^2P(x) + R(x)$$

In bit: concatena il resto ai dati originali

Quindi la parola da trasmettere è 1011010100111.

5) Verifica lato ricevitore

Il ricevitore calcola $T(x) \bmod G(x)$. In assenza di errori:

$$T(x) \bmod G(x) = 0$$

Procedura “standard” sintetica

- interpreta i k bit come polinomio $P(x)$ a gradi decrescenti;
- prendi $G(x)$ dai bit del generatore (101 → $x^2 + 1$);
- calcola $x^rP(x)$ con $r = \deg G$ (appendi r zeri ai bit);
- dividi per $G(x)$ in modulo-2 → ottieni $R(x)$ di r bit;
- trasmetti $T = \text{dati}||\text{resto} = 1011010100111$.

Procedura per scimmie disperate. esercizi CRC (bit → resto → parola trasmessa)

Dati di ingresso

- stringa di **dati** da k bit (es: 10110101001)

- **generatore** da n bit (es: 101). Il suo **grado** è $r = n - 1$.

Regole base (non discutibili)

- Lavori in GF(2): somma/sottrazione = XOR, niente riporti.
- Il **resto** della divisione deve avere **esattamente** r **bit** (se esce più corto, metti zeri a sinistra).
- Lettura polinomi: primo bit da sinistra = grado massimo, poi gradi decrescenti.

Passi meccanici (sempre uguali)

1. Conta r

$$r = \text{len}(\text{generatore}) - 1.$$

Esempio: 101 $\rightarrow r = 2$.

2. Appendi r zeri ai dati

Dati: $d[0..k-1] \rightarrow d + 0 \times r$.

Esempio: 10110101001 \rightarrow 1011010100100 .

3. Divisione binaria modulo-2 (divisione lunga a XOR)

- Prendi come **dividendo** la stringa del punto 2.
- Usa come **divisore** il generatore (es: 101).
- Scorri da sinistra: quando il bit corrente è 1 , fai XOR tra la “finestra” lunga n bit e il divisore; quando è 0 , **non** fai nulla e avanzi.
- Continua finché ti restano meno di n bit per allineare il divisore.
- Quello che rimane in coda (ultimi r bit) è il **resto**.

Pseudocodice se ti serve:

dividendo \leftarrow dati||0^r per $i = 0 \dots (\text{len}(\text{dividendo}) - n)$: se dividendo[i] = 1 allora dividendo[i .

Al termine, **resto** = ultimi r bit del dividendo; se più corto, **pad a sinistra con zeri**.

4. Costruisci la parola trasmessa

$$T = \text{dati}||\text{resto}.$$

5. Check rapido (opzionale ma furbo)

Dividi T per il generatore: **deve** dare resto 00...0 . Se non è zero, hai sbagliato XOR o padding.

Come tradurre in polinomi (se te lo chiedono)

- Dati $b_0 b_1 \dots b_{\{k-1\}}$ \rightarrow

$$P(x) = \sum b_i x^{k-1-i}$$

- Generatore $g_0 \dots g_{n-1} \rightarrow$

$$G(x) = \sum g_i x^{n-1-i}, \quad r = n - 1$$

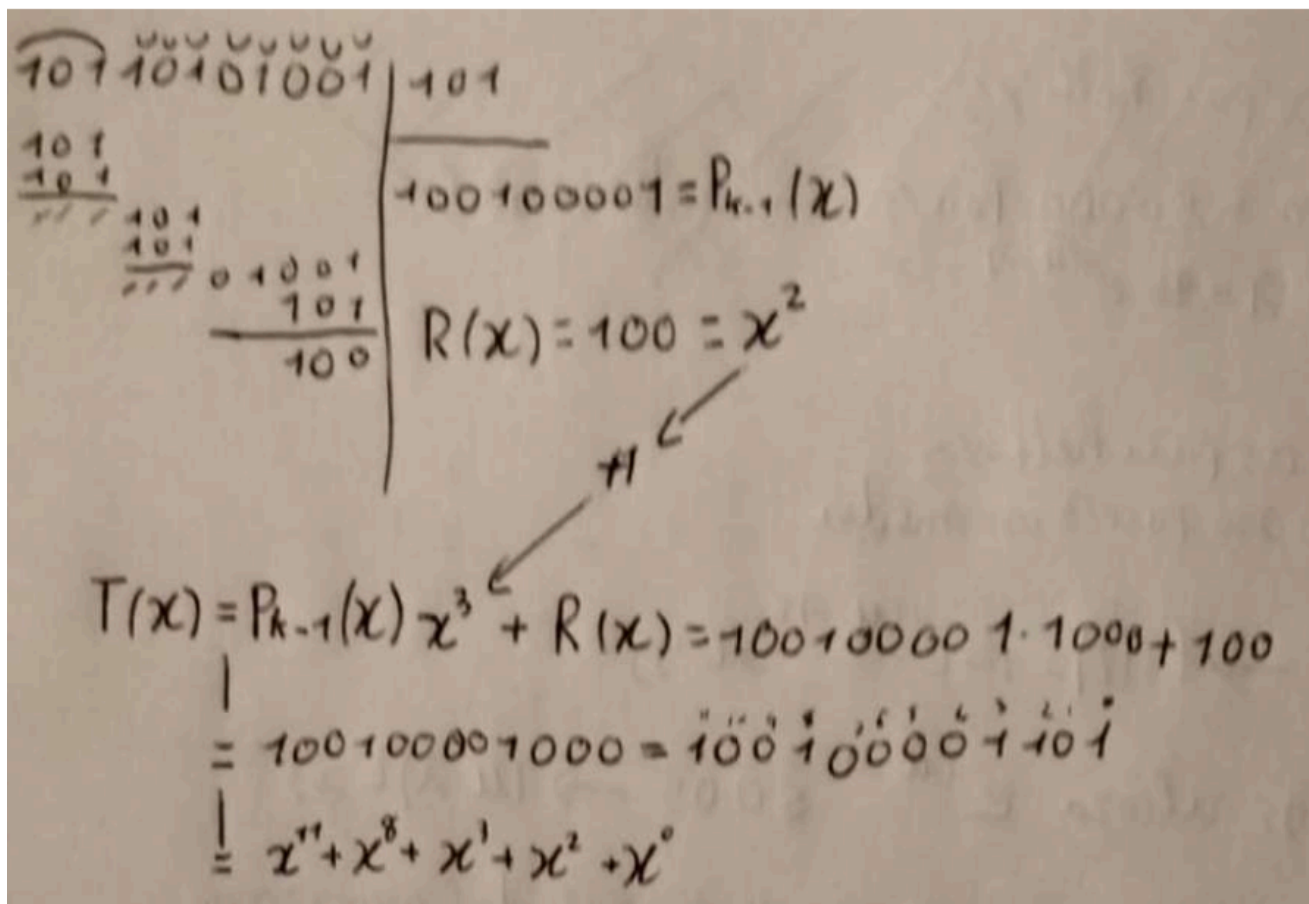
- Fai la divisione di $x^r P(x)$ per $G(x)$ (sempre modulo-2) \rightarrow **resto** $R(x)$ con $\deg R < r$.
- Parola: $T(x) = x^r P(x) + R(x)$.

Trucchetti anti-errore

- Il **resto non può avere grado** $\geq r$. Se vedi un resto tipo 100 quando $r=2$, è sbagliato.
- Durante la divisione, **solo** quando il bit in testa della finestra è 1 fai XOR col divisore.
- Se il resto ha meno di r bit, **aggiungi zeri a sinistra** fino ad arrivare a r .

Esempio lampo con i numeri dell'immagine (giusto per verificare che sai farlo)

- Dati: 10110101001, Generatore: 101 ($r = 2$)
- Append zeri: 1011010100100
- Divisione XOR \rightarrow **resto** 11
- Parola trasmessa: 10110101001 11 \Rightarrow 1011010100111.

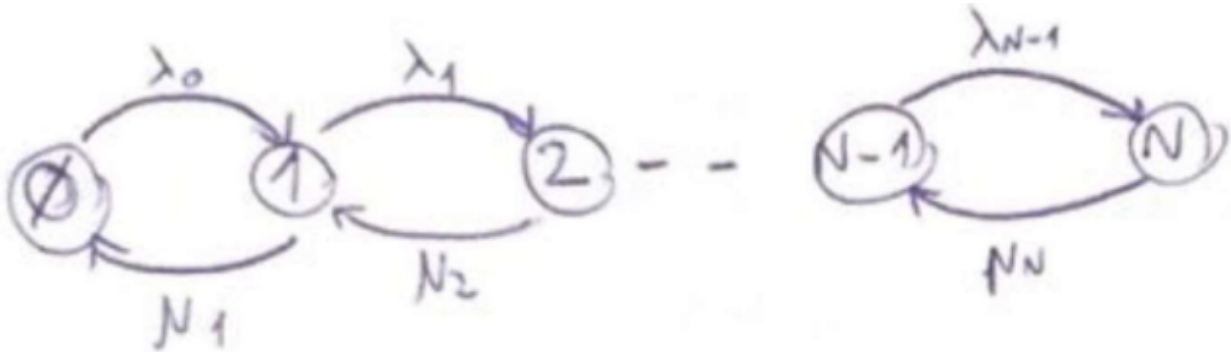


Processi di nascita–morte: cosa c'è qui

Un processo nascita–morte è un **Markov tempo-continuo** a stati discreti $k = 0, 1, 2, \dots$ in cui da ogni stato puoi solo:

- salire di 1 con **tasso di nascita** λ_k (da k a $k + 1$)
- scendere di 1 con **tasso di morte** μ_k (da k a $k - 1$)

$P_k(t)$ è la probabilità di essere nello stato k all'istante t .



Equazioni di bilancio “a piccolo intervallo”

Trascurando eventi multipli nello stesso Δt (ordine $o(\Delta t)$), per $k \geq 1$:

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t) [1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t] + P_{k-1}(t) \lambda_{k-1}\Delta t + P_{k+1}(t) \mu_{k+1}\Delta t + o(\Delta t)$$

Al bordo $k = 0$ (da 0 non si può scendere):

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) [1 - \lambda_0\Delta t] + P_1(t) \mu_1\Delta t + o(\Delta t)$$

Porti i termini a sinistra, dividi per Δt e mandi $\Delta t \rightarrow 0$.

Equazioni differenziali (Kolmogorov avanti)

Per $k \geq 1$:

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t) - (\lambda_k + \mu_k)P_k(t)$$

Per $k = 0$:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0P_0(t) + \mu_1P_1(t)$$

Sempre vale la normalizzazione:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$$

(se la catena è finita a $0, \dots, N$, la somma si ferma a N).

Stato stazionario (equilibrio)

Se il processo ammette un equilibrio, le probabilità non dipendono dal tempo:

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_k \text{ costanti.}$$

Il sistema si riduce ai bilanci stazionari:

$$\begin{aligned} -\lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1 &= 0 \\ \lambda_{k-1} P_{k-1} - (\lambda_k + \mu_k) P_k + \mu_{k+1} P_{k+1} &= 0 \quad (k \geq 1) \\ \sum_k P_k &= 1 \end{aligned}$$

Se vale la **detailed balance** (tipico nei nascita–morte), ottieni ricorrenze a due a due:

$$\mu_{k+1} P_{k+1} = \lambda_k P_k \quad \Rightarrow \quad P_{k+1} = P_k \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}$$

Iterando:

$$P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \quad (k \geq 1)$$

P_0 lo trovi da $\sum_k P_k = 1$:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

(se stati finiti $0, \dots, N$, la somma arriva a N).

Traduzione rapida delle simboliche

- λ_k : tasso di “nascita” quando sei in k (sposta $k \rightarrow k + 1$).
- μ_k : tasso di “morte” quando sei in k (sposta $k \rightarrow k - 1$).
- $P_k(t)$: probabilità di essere in k all’istante t .
- “Stazionario”: metti a zero le derivate, risolvi il sistema, normalizzi.

Cosa ricordare senza formule inutili

1. Da k puoi solo andare a $k \pm 1$ con tassi λ_k, μ_k
2. Bilancio di probabilità: **entra da vicini, esce con somma dei tassi locali**
3. In equilibrio: **flusso a destra = flusso a sinistra** \Rightarrow ricetta prodotto per P_k
4. Normalizza per chiudere P_0 e quindi tutte le P_k

(pagina 394)

Risposta di quadripoli lineari a oscillazioni modulate. Equivalente passa basso

Risposta di un LTI a un segnale passabanda e equivalente passa-basso

Setup

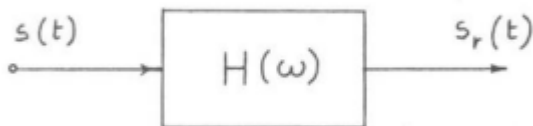
Un segnale passabanda (oscillazione modulata) si scrive come

$$s(t) = \Re\{i(t) e^{j\omega_0 t}\}$$

dove $i(t)$ è l'involuppo complesso a banda bassa (banda B_u centrata in 0) e ω_0 è la portante.

Il sistema è LTI con funzione di trasferimento

$$H(\omega) = T(\omega) e^{-j\beta(\omega)}.$$



Poiché il sistema è LTI, **non crea nuove frequenze**: se $S(\omega)$ è non nullo solo attorno a $+\omega_0$ (passa-banda), anche l'uscita $S_r(\omega)$ rimane passabanda.

Definizioni spettrali (involuppo \leftrightarrow passabanda)

Per segnali passabanda attorno a $+\omega_0$ si usa la relazione standard

$$I(\omega) = \begin{cases} 2 S(\omega + \omega_0), & |\omega| \leq B_u/2 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

cioè lo spettro dell'involuppo $I(\omega)$ è lo spettro passabanda traslato di $-\omega_0$ e raddoppiato sull'intorno di 0.

Attraversamento del sistema

All'uscita vale

$$S_r(\omega) = H(\omega) S(\omega).$$

Quindi, usando la definizione sopra anche per l'uscita,

$$I_r(\omega) = 2 S_r(\omega + \omega_0) = 2 H(\omega + \omega_0) S(\omega + \omega_0) = H(\omega + \omega_0) I(\omega), \quad |\omega| \leq B_u/2. \quad (\star)$$

Equivalente passa-basso

Si introduce la **funzione di trasferimento equivalente passa-basso**

$$H_0(\omega) = \begin{cases} H(\omega + \omega_0), & \omega + \omega_0 \geq 0 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

che, per i nostri segnali passabanda centrati in $+\omega_0$, si usa semplicemente come

$$I_r(\omega) = H_0(\omega) I(\omega).$$

In tempo:

$$i_r(t) = h_0(t) * i(t), \quad s_r(t) = \Re\{i_r(t) e^{j\omega_0 t}\}.$$

Cosa significa in pratica

- Per calcolare l'uscita di un LTI su un segnale modulato:
 1. prendi $H(\omega)$ e **traslala** di $-\omega_0 \rightarrow$ ottieni $H_0(\omega)$;
 2. **filtra l'involuppo**: $I_r(\omega) = H_0(\omega)I(\omega)$;
 3. **rimetti la portante**: $s_r(t) = \Re\{i_r(t)e^{j\omega_0 t}\}$.
- Se $T(\omega)$ è zero (o quasi) nella banda del segnale d'ingresso, l'uscita è nulla: il sistema non lascia passare la banda utile.
- L'ampiezza e la fase dell'involuppo in uscita sono modellate da $H_0(\omega)$, cioè dall'andamento di $H(\omega)$ visto attorno a ω_0 .

Riassunto super-secco

LTI su passabanda \equiv filtro passa-basso $H_0(\omega) = H(\omega_0 + \omega)$

$$I_r(\omega) = H_0(\omega)I(\omega), \quad s_r(t) = \Re\{[h_0 * i](t) e^{j\omega_0 t}\}.$$

Il succo per disperati

LTI + passabanda: succo da ricordare

Modello

$$s(t) = \Re\{i(t) e^{j\omega_0 t}\}$$

$i(t)$ = involuppo complesso a banda bassa. Il sistema è LTI con $H(\omega)$.

Passo chiave (spettri)

1) Dimostrare e descrivere il teorema del campionamento nel dominio dei tempi

$$I(\omega) = 2 S(\omega + \omega_0) \quad (\text{finestra } |\omega| \leq B_u/2)$$

cioè: **trasla** lo spettro di S di $-\omega_0$ e raddoppia vicino a 0.

Uscita

$$S_r(\omega) = H(\omega)S(\omega)$$

$$I_r(\omega) = H(\omega + \omega_0) I(\omega) \quad (|\omega| \leq B_u/2)$$

Equivalente passa-basso

$$H_0(\omega) = H(\omega_0 + \omega) \quad \Rightarrow \quad I_r(\omega) = H_0(\omega) I(\omega)$$

In tempo:

$$i_r(t) = h_0(t) * i(t), \quad s_r(t) = \Re\{i_r(t)e^{j\omega_0 t}\}$$

Procedura 3 step (sempre questa)

1. **Costruisci H_0** : prendi $H(\omega)$ e guarda attorno a $\omega_0 \rightarrow H_0(\omega) = H(\omega_0 + \omega)$.
2. **Filtra l'involuppo**: $i_r = h_0 * i$.
3. **Rimetti la portante**: $s_r(t) = \Re\{i_r(t)e^{j\omega_0 t}\}$.

Intuizione lampo

- Il sistema LTI **non crea nuove frequenze**: agisce sull'involuppo come un **passa-basso** H_0 .
- Se $H(\omega)$ è piccolo nella banda attorno a ω_0 , **l'uscita svanisce**.
- Ampiezza e fase dell'involuppo cambiano secondo H_0 .

Super succo extra disperato

Cos'è un LTI (Linear Time-Invariant) in 30 secondi

Definizione pratica

- **Lineare (L)**: vale la sovrapposizione.
Se in ingresso metti x_1 e ottieni y_1 , e metti x_2 e ottieni y_2 , allora:

$$a x_1(t) + b x_2(t) \Rightarrow a y_1(t) + b y_2(t)$$

- **Tempo-Invariante (TI):** uno **stesso ritardo** all'ingresso produce **lo stesso ritardo** all'uscita.

Se $x(t) \Rightarrow y(t)$, allora $x(t - t_0) \Rightarrow y(t - t_0)$ per **qualsiasi** t_0 .

Come lo riconosci al volo

- **Sì, LTI:** filtri con R, L, C a parametri costanti, media mobile, convoluzioni.
- **No, non LTI:** diodi/interruttori (non lineari), guadagno che cambia col tempo $g(t)x(t)$ (non TI), saturazioni/clipping.

Perché ti serve

- Per i sistemi LTI esiste la **funzione di trasferimento** $H(\omega)$: in frequenza l'uscita è

$$S_r(\omega) = H(\omega) S(\omega)$$

e nel tempo è una **convoluzione**:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Collegamento con i passabanda (il pezzo dell'esercizio)

Se $s(t) = \Re\{i(t)e^{j\omega_0 t}\}$ entra in un LTI, l'effetto si riassume in un **equivalente passa-basso**:

$$H_0(\omega) = H(\omega_0 + \omega), \quad I_r(\omega) = H_0(\omega) I(\omega)$$

poi rimetti la portante:

$$s_r(t) = \Re\{i_r(t)e^{j\omega_0 t}\}, \quad i_r = h_0 * i$$

Procedura lampo da ricordare

1. **Costruisci H_0 :** prendi $H(\omega)$ e traslala di $-\omega_0$.
2. **Filtra l'involuppo $i(t)$** con $H_0 \rightarrow$ ottieni $i_r(t)$.
3. **Rimetti la portante $e^{j\omega_0 t}$** \rightarrow ottieni $s_r(t)$.

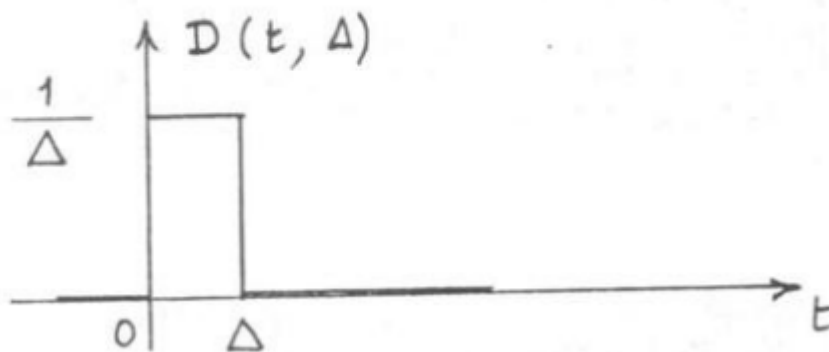
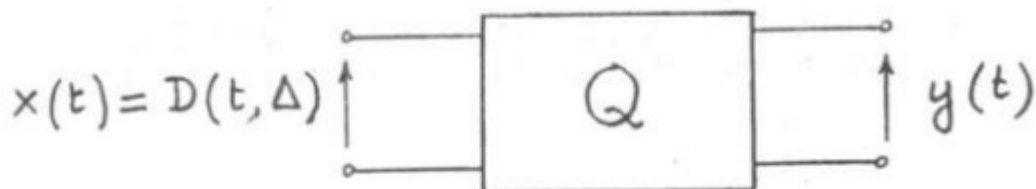
Definire la risposta impulsiva di una rete lineare con relativi schemi e dimostrare il legame con la funzione di trasferimento di una rete lineare

libro 3.29, pdf: 123

Risposta impulsiva di una rete lineare

La **risposta impulsiva** $h(t)$ di una rete lineare descrive come il sistema reagisce a un **impulso unitario** applicato al suo ingresso.

Serve per caratterizzare completamente il comportamento della rete nel **dominio del tempo**.



Definizione

Si applica alla rete un impulso rettangolare $D(t, \Delta)$ di ampiezza $\frac{1}{\Delta}$ e durata Δ , centrato in $t = 0$:

$$x(t) = D(t, \Delta)$$

La risposta del sistema è $y(t)$.

Definiamo la risposta impulsiva come il limite della risposta $y(t)$ al tendere di Δ a zero:

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} y(t)$$

In forma simbolica:

$$\delta(t) \xrightarrow{Q} h(t)$$

dove Q rappresenta la rete lineare.

Condizione di causalità

Per una rete **fisicamente realizzabile** (cioè causale) si richiede che:

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

Il sistema quindi non può rispondere prima che l'impulso venga applicato.

Risposta a un segnale generico

Qualsiasi segnale $x(t)$ può essere espresso come **somma continua di impulsi**:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Questo significa che $x(t)$ è ottenibile come somma pesata di impulsi unitari $\delta(t - \tau)$ di ampiezza $x(\tau)$.

Poiché il sistema è lineare, la risposta totale $y(t)$ sarà la somma delle risposte a ciascun impulso pesato:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Questa è la **convoluzione** tra $x(t)$ e $h(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Nel caso di sistema causale, il limite inferiore dell'integrale diventa 0:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Legame con la funzione di trasferimento

Nel **dominio delle frequenze**, la funzione di trasferimento $H(\omega)$ è la trasformata di Fourier della risposta impulsiva:

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

Viceversa, la risposta impulsiva si ottiene dalla trasformata inversa:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Applicando la trasformata di Fourier alla relazione di convoluzione, si ottiene:

$$\mathcal{F}[y(t)] = \mathcal{F}[x(t) * h(t)] = X(\omega) H(\omega)$$

cioè:

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$$

Sintesi finale

Dominio	Relazione	Significato
Tempo	$y(t) = x(t) * h(t)$	La risposta del sistema è la convoluzione tra ingresso e risposta impulsiva
Frequenza	$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$	Il prodotto nel dominio delle frequenze corrisponde alla convoluzione nel dominio del tempo

La **risposta impulsiva** e la **funzione di trasferimento** rappresentano dunque due descrizioni equivalenti di una rete lineare:

- $h(t)$ nel **dominio del tempo**
- $H(\omega)$ nel **dominio della frequenza**

Sono legate tra loro tramite la **trasformata di Fourier**.

Domande flash

Ripasso Q/A – teoria segnali, modulazioni, reti

1. “La banda di Nyquist è la banda minima di una funzione che vale x_0 per $n = 0$ e 0 altrove.”
→ **Falso**. Quella è la delta di Kronecker (spettro piatto), non una “banda di Nyquist”.
2. “Un segnale periodico di periodo T non può essere rappresentato dall’integrale di Fourier.”
→ **Vero**. Per i periodici si usa **serie** di Fourier; l’integrale vale per segnali a durata infinita non periodici.
3. “Un filtro trasversale (FIR) presenta solo zeri.”
→ **Vero**. Un FIR ha solo zeri (niente poli finiti).
4. “Un filtro ricorrente (IIR) presenta poli e zeri.”
→ **Vero**. Presenza di retroazione \Rightarrow poli (oltre agli zeri).
5. “Un filtro puramente ricorrente presenta solo poli.”
→ **Vero**. Solo feedback (nessun ramo diretto) \Rightarrow solo poli (a parte il guadagno).
6. “Segnale a energia e autocorrelazione sono legati (a costante) dalla trasformata di Fourier.”
→ **Vero**. Teorema di Wiener–Khinč’in: $|X(f)|^2 \leftrightarrow R_x(\tau)$.

7. **“L’AM è anche chiamata DSB.”**
→ **Vero (in senso lato).** L’AM classica è DSB con portante (DSB-LC); DSB-SC è senza portante.
8. **“Il criterio di Nyquist serve per annullare l’ISI.”**
→ **Vero.** Condizione di zero-ISI nel campionamento simbolico.
9. **“Una modulazione a prodotto genera sempre un segnale passa-banda.”**
→ **Vero.** Moltiplicare per $\cos(\omega_0 t)$ trasla lo spettro attorno a $\pm\omega_0$.
10. **“Un codice si dice sistematico se i k bit informativi sono distinti dagli $n - k$ di ridondanza.”**
→ **Vero.** Gli informativi compaiono in chiaro.
11. **“Se il parametro $a = \frac{t_{\text{prop}}}{t_{\text{tx}}}$ è grande (> 1) nascono problemi.”**
→ **Vero.** Grande latenza rispetto al tempo di trasmissione \Rightarrow efficienza/protocolli peggiorano.
12. **“ $e^{j\omega_0 t}$ ha potenza finita, quindi non ammette trasformata di Fourier (classica).”**
→ **Vero.** Ha energia infinita; in TF compare come distribuzione (δ), non come TF ordinaria.
13. **“La formula di Carson dà la banda di FM/PM centrata su ω_0 .”**
→ **Vero.** $B \approx 2(\Delta f + f_m)$ attorno alla portante.
14. **“In TDMA il ritardo del pacchetto è minore che in FDMA.”**
→ **Falso (in genere).** TDMA introduce attese di slot; a parità di tutto l’average delay è tipicamente maggiore.
15. **“Lo slotted ALOHA ha throughput massimo doppio dell’ALOHA puro.”**
→ **Vero.** S_{max} : $1/e$ vs $1/(2e)$.
16. **“Un modulatore PM diventa FM anteponendo una rete integratrice.”**
→ **Vero.** Integrare il segnale modulante prima del PM \Rightarrow effetto FM.
17. **“Un modulatore FM diventa PM anteponendo una rete derivatrice.”**
→ **Vero.** Derivare il modulante prima dell’FM \Rightarrow effetto PM.
18. **“Un demodulatore coerente usa la portante del segnale modulato.”**
→ **Vero.** Richiede oscillatore locale in fase/frequenza.
19. **“Per descrivere l’energia di una funzione aleatoria serve la densità di probabilità del secondo ordine.”**
→ **Falso (formulata così).** Servono **statistiche di 2° ordine** (autocorrelazione/PSD); non l’intera pdf congiunta.
20. **“La modulazione a prodotto ha spettro con due bande laterali ai lati della portante.”**
→ **Vero.** Classico DSB (laterali a $\omega_0 \pm \Omega$).
21. **“La stazionarietà è condizione necessaria perché un processo sia ergodico.”**
→ **Vero (di norma).** L’ergodicità in media richiede almeno WSS; non è però sufficiente.
22. **“Prestazioni di rete degradano quando $\frac{t_{\text{prop}}}{t_{\text{tx}}} > 0,1$.”**
→ **Vero (regola pratica).** RTT alto rispetto al tempo di trasmissione penalizza i protocolli.

23. “SSB-SC è sinonimo di conversione a frequenza in salita.”

→ **Falso**. SSB-SC = singola banda laterale a portante soppressa; l’up-conversion è un’altra cosa.

24. “Livelli ISO/OSI: 1 Fisico, 2 Linea, 3 Rete, 4 Trasporto, 5 Sessione, 6 Presentazione, 7 Applicazione.”

→ **Vero**. Ordine corretto.

25. “FDMA e TDMA hanno la stessa velocità di trasmissione (aggregate), a parità di risorse.”

→ **Vero (in prima approssimazione)**. Stessa risorsa totale divisa in frequenza o in tempo ⇒ throughput aggregato simile; **delay** e **overhead** differiscono.

Descrivere i 3 passi della conversione A/D (grafici e schemi a blocchi) e il segnale numerico ottenuto aggiungendo opportuni commenti

libro 7.2, pdf: 239

Conversione A/D (Analogico → Digitale)

La conversione di un segnale analogico in un segnale digitale avviene in **tre fasi principali**:

1. **Campionamento del segnale**
2. **Quantizzazione dei valori campionati**
3. **Codifica dei valori quantizzati**

1. Campionamento del segnale

Il **campionamento** consiste nel rilevare il valore del segnale analogico $x(t)$ a intervalli di tempo regolari T (detto *periodo di campionamento*).

La **frequenza di campionamento** è quindi $f_0 = 1/T$ e deve essere **superiore al doppio** della frequenza massima f_m contenuta nello spettro del segnale:

$$f_0 > 2f_m$$

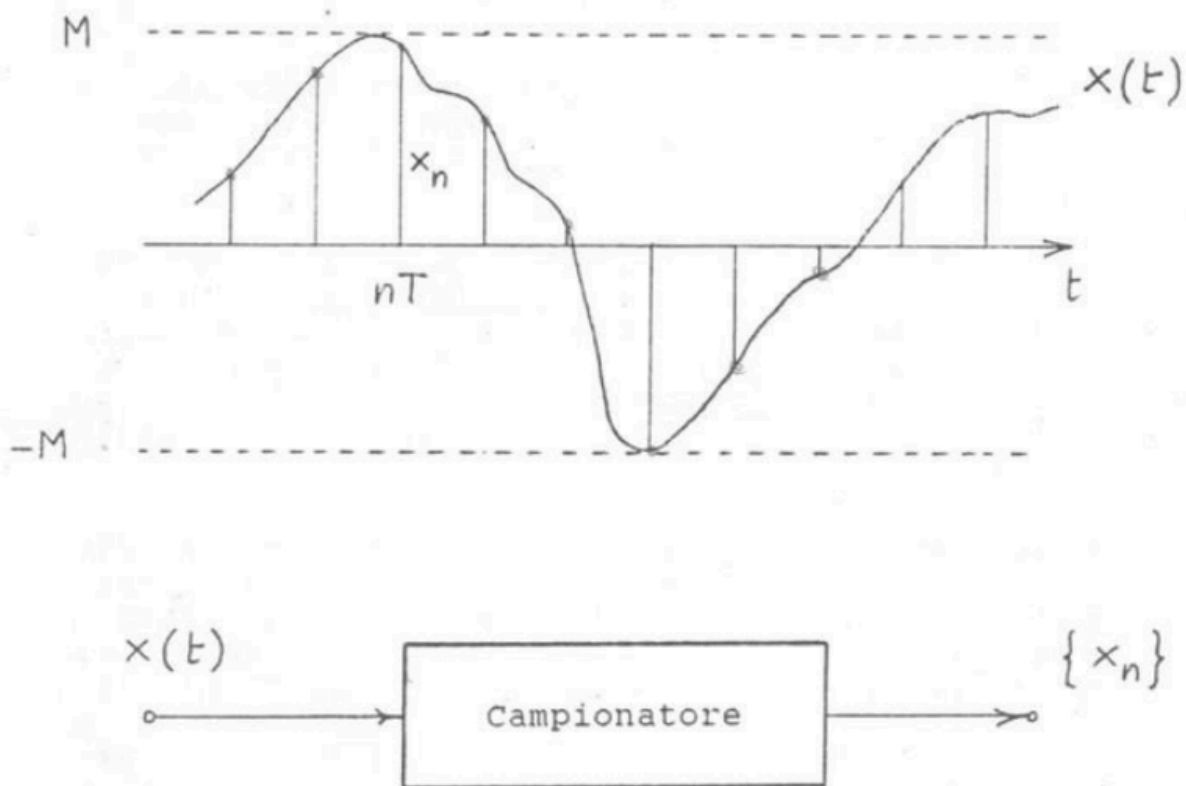
Questa condizione (teorema di Nyquist) garantisce che il segnale possa essere **ricostruito senza aliasing**.

Il risultato è una serie discreta di valori nel tempo:

$$x_n = x(nT)$$

cioè una **discretizzazione dell’asse dei tempi**, dove ogni punto x_n rappresenta il valore del segnale all’istante $t = nT$.

Schema a blocchi:



2. Quantizzazione dei valori campionati

Una volta ottenuti i valori campionati $\{x_n\}$, il passo successivo è **approssimarli** a un numero finito di livelli discreti.

Il segnale $x(t)$ varia all'interno di un intervallo $(-M, M)$, che viene suddiviso in L intervalli detti **livelli di quantizzazione**.

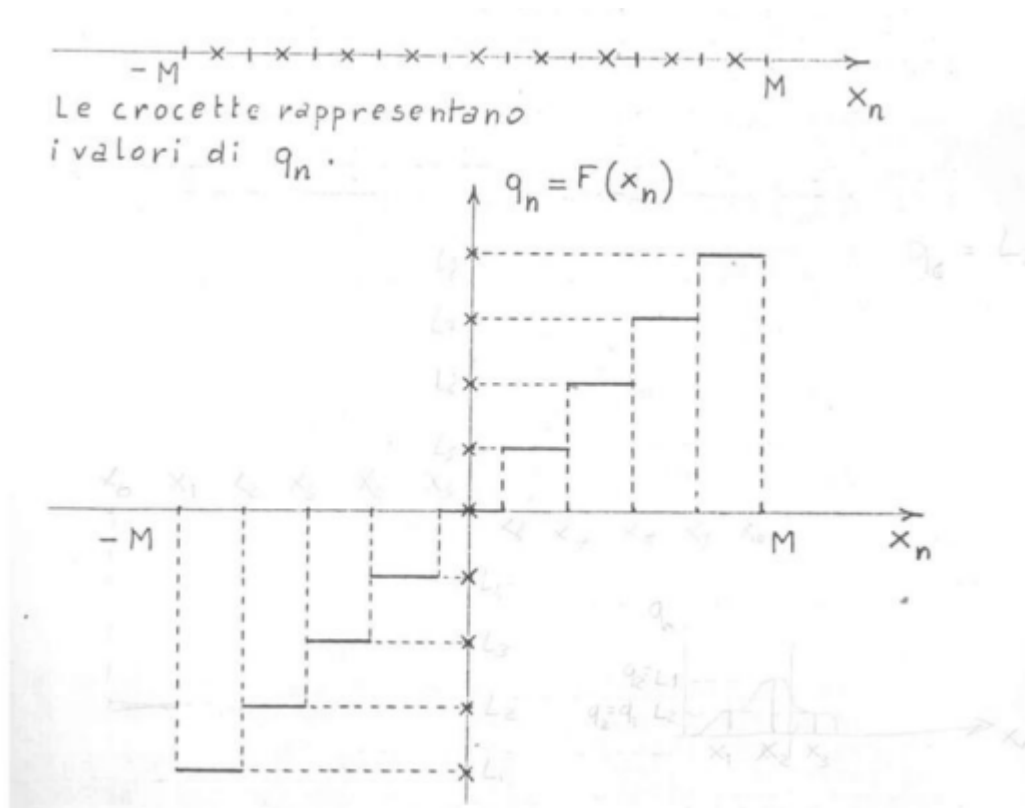
Ogni valore campionato x_n viene sostituito da un valore q_n appartenente a un livello discreto, secondo una legge di quantizzazione:

$$q_n = F(x_n)$$

L'operazione è **irreversibile**, poiché comporta una perdita di informazione (errore di quantizzazione).

La funzione $F(x_n)$ definisce come i valori continui vengono mappati sui livelli discreti. Il risultato è una **discretizzazione dell'ampiezza** del segnale.

Schema a blocchi:



3. Codifica dei valori campionati e quantizzati

Infine, ogni valore quantizzato q_n viene **codificato** in una parola binaria di m bit:

$$q_n \Rightarrow b_n^{(1)}, b_n^{(2)}, \dots, b_n^{(m)}$$

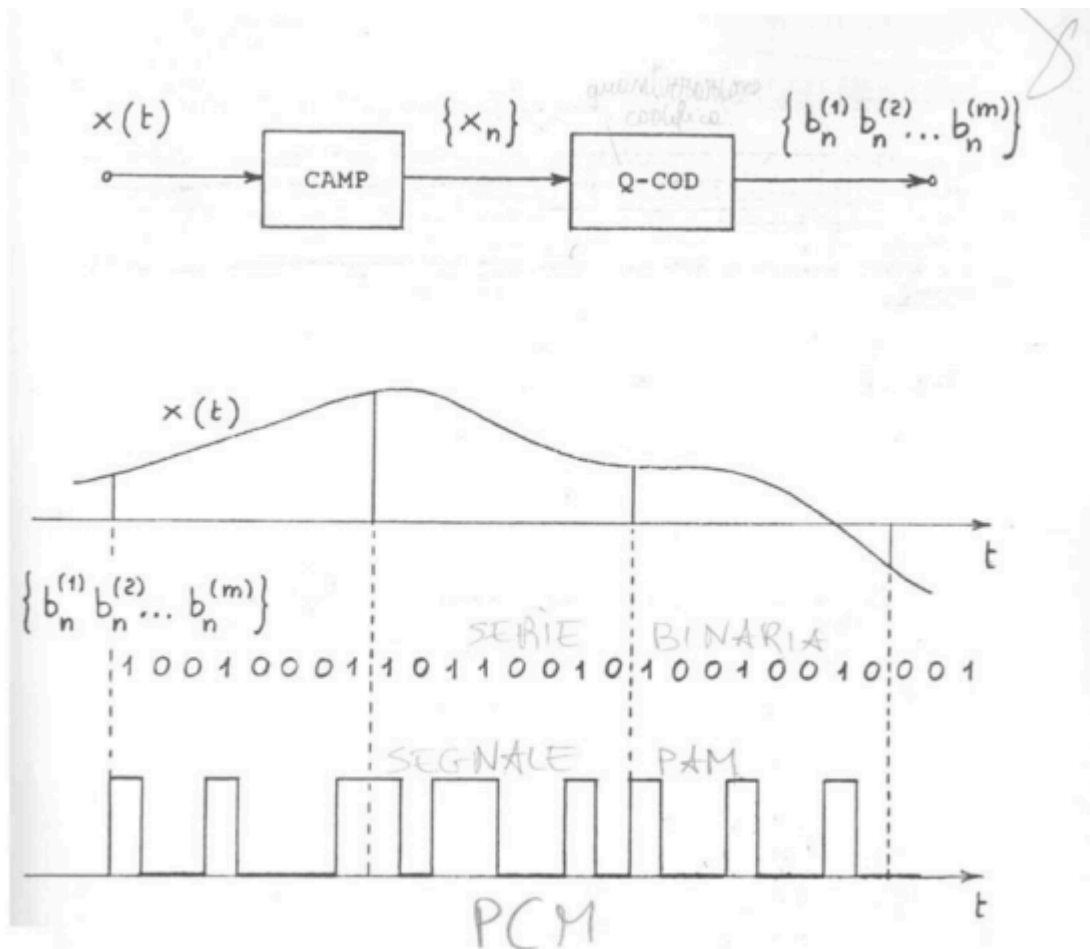
Il numero di bit necessari è il più piccolo intero che soddisfa:

$$m \geq \log_2 L$$

dove L è il numero di livelli di quantizzazione.

Il risultato è una **serie di parole binarie**, cioè un segnale numerico che rappresenta il segnale analogico originario.

Schema a blocchi:



Esempio pratico (telefono analogico)

Per un segnale telefonico con banda massima $f_m = 3400$ Hz:

- Frequenza di campionamento: $f_0 = 8$ kHz (cioè $> 2f_m$)
- Quantizzazione: $L = 256$ livelli
- Numero di bit: $m = 8$
- Bit rate complessivo:

$$B_r = f_0 \times m = 8000 \times 8 = 64 \text{ kbit/s}$$

Commento finale:

Il processo di conversione A/D trasforma un segnale continuo $x(t)$ in una sequenza numerica adatta all'elaborazione e trasmissione digitale.

Il PCM è il formato standard di rappresentazione dei segnali audio digitali, ad esempio nei sistemi telefonici e nelle registrazioni digitali.

Descrivere la conversione D-A rappresentando con opportuni blocchi e aggiungendo commenti opportuni

libro 7.3, pdf: 243

Conversione D/A

La **conversione digitale-analogica (D/A)** ha lo scopo di ricostruire il segnale analogico originale $x(t)$ a partire dalla sequenza numerica ricevuta dal sistema di codifica.

Si compone di due fasi principali:

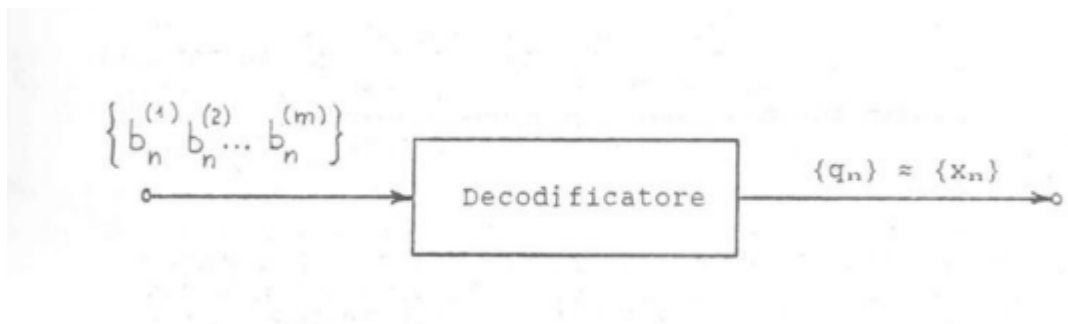
1. **Decodificazione**
2. **Ricostruzione del segnale analogico**

1. Decodificazione

Il **decodificatore** rigenera i valori campionati e quantizzati della serie $\{q_n\}$ a partire dalle parole binarie del codice ricevuto $\{b_n^{(1)}, b_n^{(2)}, \dots, b_n^{(m)}\}$.

Poiché la **quantizzazione è un'operazione non reversibile**, la sequenza $\{q_n\}$ viene trattata come la sequenza $\{x_n\}$ dei campioni del segnale originale.

Schema:



Il segnale decodificato è quindi:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) g(t - nT)$$

dove:

- $x(nT)$ sono i campioni (o i valori quantizzati q_n),
- $g(t)$ è l'impulso usato per la ricostruzione (di durata T).

A meno dell'errore di quantizzazione, $s(t)$ è una **sequenza di impulsi ponderati**, ossia un segnale **PAM (Pulse Amplitude Modulation)**.

2. Ricostruzione di $x(t)$ dal segnale PAM

Consideriamo la trasformata di Fourier del segnale PAM:

$$S(\omega) = \frac{1}{T} G(\omega) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\omega + \frac{2\pi k}{T}\right)$$

Il **campionamento** di $x(t)$ provoca la **replicazione periodica** dello spettro $X(\omega)$ a intervalli di $\frac{2\pi}{T}$.

Per recuperare $x(t)$ è necessario **isolare la replica principale** (cioè quella per $k = 0$), eliminando le repliche indesiderate tramite un **filtro passa-basso**.

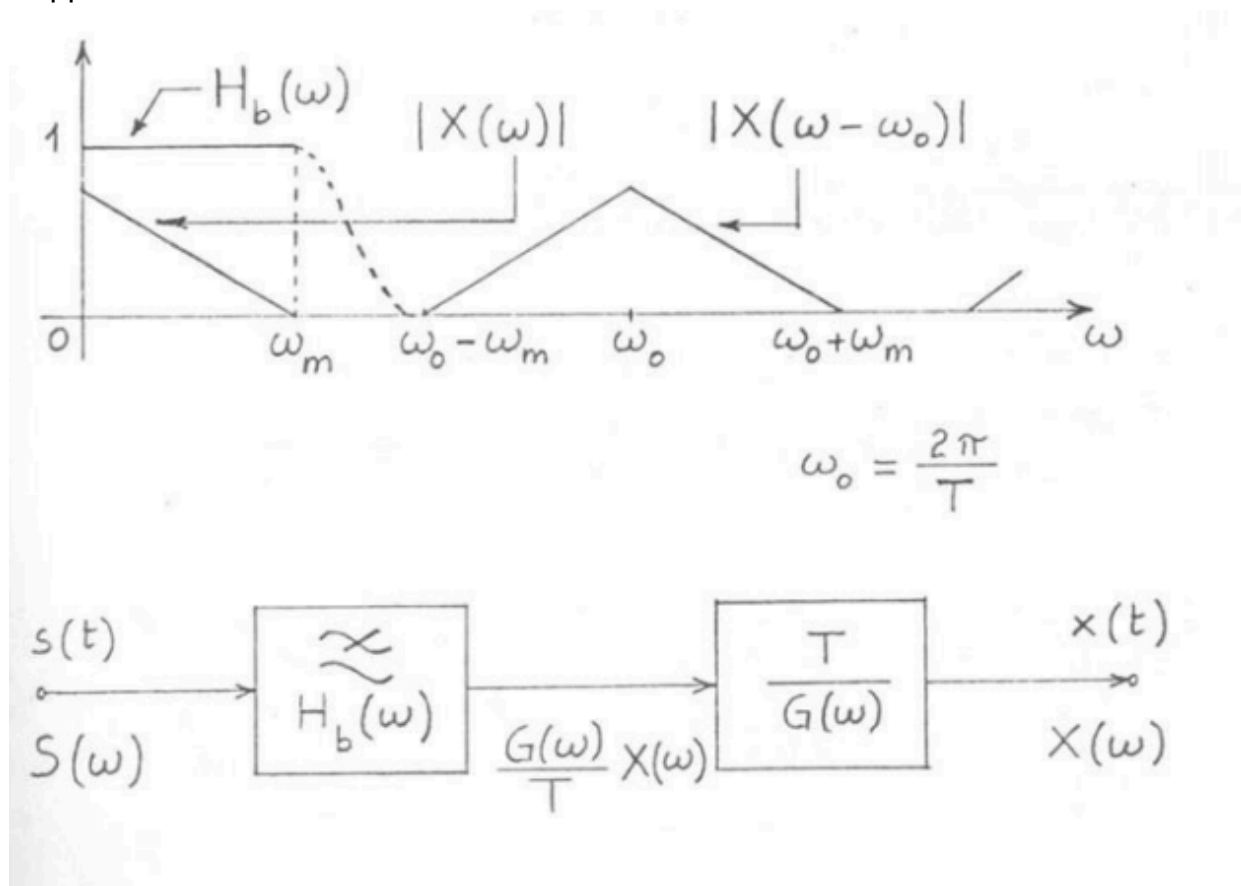
3. Filtraggio ed Equalizzazione

Il filtro passa-basso $H_b(\omega)$ lascia passare la banda utile $(-\omega_m, \omega_m)$ del segnale originario e attenua le repliche.

Schema in frequenza:

$$|X(\omega)|, |X(\omega - \omega_0)|, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Rappresentazione a blocchi:



In pratica:

- Se la durata dell'impulso $g(t)$ è molto minore di T , allora $G(\omega)$ è quasi costante nella banda utile.
- In tal caso, la rete equalizzatrice $T/G(\omega)$ può essere **omessa**, e il filtro passa-basso è **sufficiente** per ottenere $x(t)$ (a meno di costanti moltiplicative o ritardi).

Esempio (caso telefonico):

filtro con banda passante fino a 3400 Hz e banda attenuata da 4600 Hz in poi.

4. Schema complessivo della conversione D/A

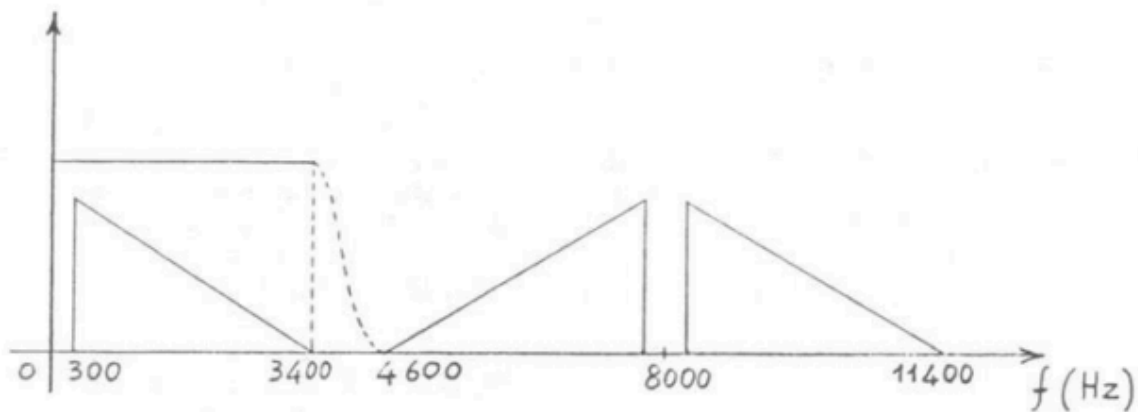
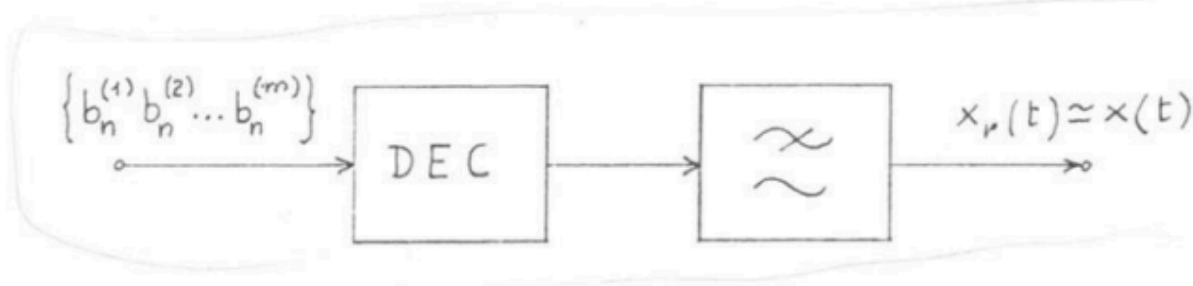


Fig. 7.3.3

CONCLUDENDO, LA CONVERSIONE D/A AVVIENE COME MOSTRATO IN FIGURA 7.3.4.



5. Rumore di quantizzazione

Il segnale ricostruito si indica con $x_r(t)$ e non con $x(t)$ per evidenziare che, a causa della **quantizzazione**, non può coincidere esattamente con l'originale.

Si definisce:

$$\varepsilon(t) = x_r(t) - x(t)$$

$\varepsilon(t)$ è chiamato **rumore di quantizzazione**.

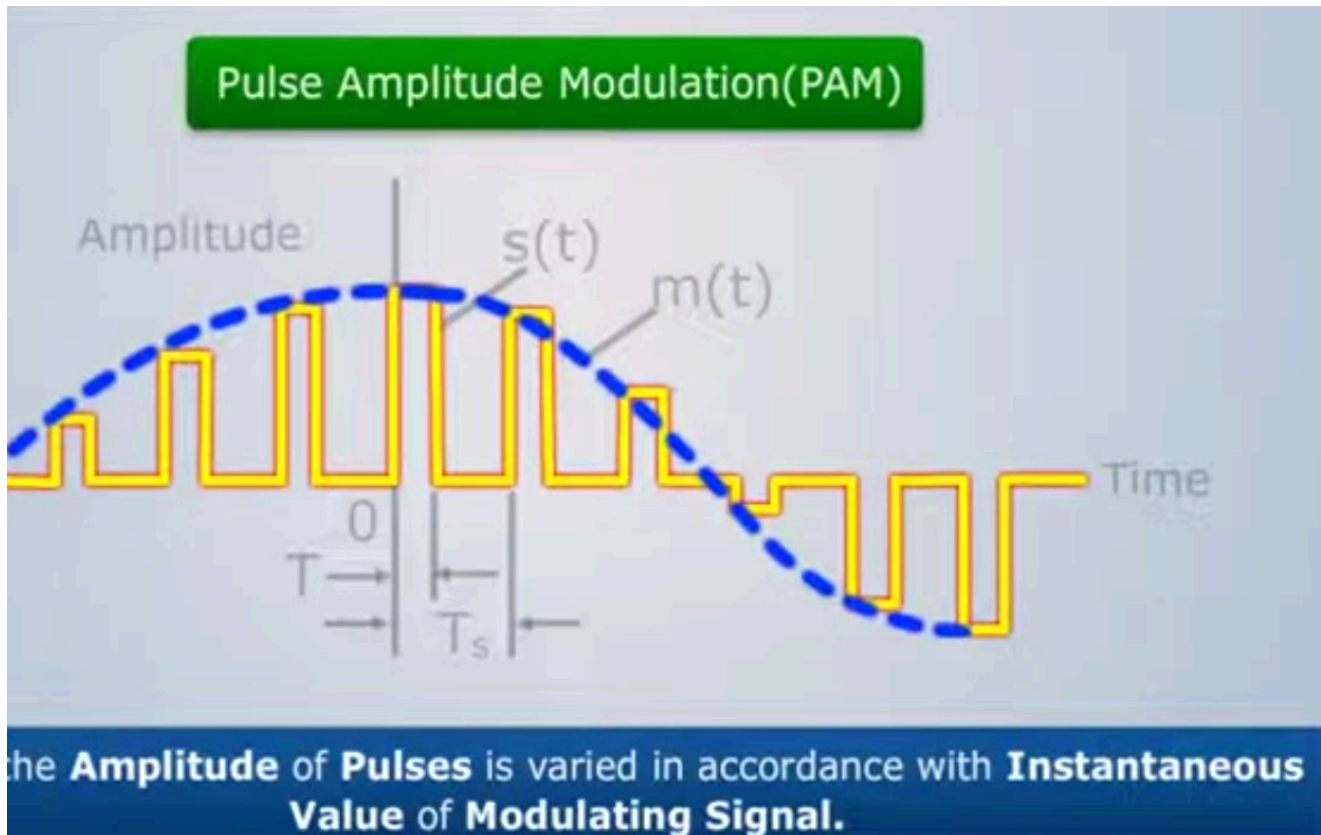
In forma equivalente:

$$x_r(t) = x(t) + \varepsilon(t)$$

Il rumore di quantizzazione è un **errore additivo** introdotto dal processo di quantizzazione. La sua potenza può essere ridotta aumentando il numero di livelli di quantizzazione (bit del convertitore).

6) Segnali PAM definizione e calcolo dei due spettri

In fondo c'è una descrizione di ChatGPT



Definizione

Un segnale PAM è una **successione di impulsi modulati in ampiezza**:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t - nT)$$

- $g(t)$: forma d'onda dell'impulso (energia finita).
- T : periodo di campionamento temporale degli impulsi.
- $\{a_n\}$: serie temporale dei pesi (non necessariamente a media nulla né potenza nulla).
- Indichiamo con $\phi(\tau)$ l'autocorrelazione di $g(t)$ e con $G(\omega)$ la sua trasformata di Fourier.

Vale:

$$\mathcal{F}\{\phi(\tau)\} = |G(\omega)|^2$$

vuol dire:

più il segnale nel tempo è simile ai suoi stadi precedenti e più lo spettro di energia è "bilanciato".

se a $t_0=100000$ e a $t_1=50$ significa che la potenza stava tutta in t_0 e lo spettro è un segnale tipo triangolo ripidissimo. mentre un segnale costante a media finita (tipo un seno) avrà un grafico della potenza a tanti triangolini ma non troppo ripidi. un segnale costante infinite invece avrà come grafico una retta dritta, perché l'autocorrelazione è sempre 1.

L'energia di un segnale non la puoi leggere nel tempo, ma solo nelle frequenze.

Più il segnale, nel tempo, rimane simile ai suoi stati precedenti, più la sua autocorrelazione resta alta anche per grandi spostamenti (τ).

Questo significa che il segnale è coerente nel tempo — cioè non cambia bruscamente — e quindi il suo spettro di energia risulta più **concentrato** (stretto), con poche frequenze dominanti.

Viceversa, se il segnale cambia spesso e in modo imprevedibile, l'autocorrelazione crolla subito a zero:

il segnale smette presto di assomigliare a se stesso → lo spettro si **allarga**, cioè la potenza si distribuisce su molte frequenze diverse.

Un segnale costante nel tempo (tipo $x(t)=C$) ha autocorrelazione sempre uguale a C^2 , e quindi uno spettro formato da una **riga singola** a frequenza zero (tutta la potenza concentrata nel "DC").

Una sinusoide pura, invece, è periodica: si ripete perfettamente → autocorrelazione oscillante per sempre → spettro con **due righe** in corrispondenza delle sue frequenze fondamentali.

Infine, un segnale caotico (tipo rumore) ha autocorrelazione quasi nulla per $\tau \neq 0$, e quindi il suo spettro è **piatto**: potenza distribuita su tutte le frequenze.

In sintesi:

- segnale regolare → autocorrelazione lenta → spettro stretto (frequenze!)
- segnale casuale → autocorrelazione breve → spettro largo (frequenze!)

Decomposizione utile

Separiamo la parte media di $\{a_n\}$ dalla parte a valor medio nullo:

$$\langle a_n \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N a_n \quad x_n = a_n - \langle a_n \rangle$$

Scriviamo $s(t)$ come somma di due componenti:

$$s(t) = s_m(t) + x(t)$$

con

$$s_m(t) = \langle a_n \rangle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t - nT) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n g(t - nT)$$

- $s_m(t)$ è **periodico** (treno di impulsi pesato dalla media).
- $x(t)$ ha **valor medio nullo** perché $\langle x_n \rangle = 0$.

Spettro della componente periodica $s_m(t)$ (spettro a righe)

Il treno periodico ammette una serie di Fourier esponenziale:

1) Dimostrare e descrivere il teorema del campionamento nel dominio dei tempi

$$s_m(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} c_\ell e^{j\ell \frac{2\pi}{T} t}$$

con coefficienti

$$c_\ell = \frac{\langle a_n \rangle}{T} G\left(j\ell \frac{2\pi}{T}\right)$$

Quindi lo **spettro in ampiezza** di s_m è **a righe** in $\omega_\ell = \ell \frac{2\pi}{T}$, con ampiezze proporzionali a $|c_\ell|$

Spettro di potenza della parte a media nulla $x(t)$ (spettro distribuito)

L'autocorrelazione di $x(t)$ è

$$C(\tau) = \langle x(t) x(t + \tau) \rangle$$

e lo **spettro di potenza** è

$$G_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{F}\{C(\tau)\}$$

Sviluppo (chiave di volta degli appunti/dispense):

1. Sostituendo $x(t) = \sum_n x_n g(t - nT)$ e $x(t + \tau) = \sum_i x_i g(t + \tau - iT)$, mediando nel tempo e sfruttando l'ergodicità in senso lato, si ottiene

$$C(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \int_{-NT}^{NT} \sum_{n,i} x_n x_i g(t - nT) g(t + \tau - iT) dt$$

2. L'integrale in t è una correlazione di g che dipende solo dalla differenza di indici:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t - nT) g(t + \tau - iT) dt = \phi(\tau - (i - n)T)$$

3. Definendo l'**autocorrelazione della sequenza** $\{x_n\}$:

$$C_k = \langle x_n x_{n+k} \rangle$$

si ottiene la **convoluzione discreta-continua**:

$$C(\tau) = \frac{1}{T} \{C_k\} * \phi(\tau) \iff C(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \phi(\tau - kT)$$

4. Trasformando:

$$\frac{1}{\pi} \mathcal{F}\{C(\tau)\} = \frac{1}{T} \mathcal{F}\{\{C_k\}\} \mathcal{F}\{\phi(\tau)\} = \frac{1}{T} \underbrace{\mathcal{F}\{\{C_k\}\}}_{\text{spettro DT}} |G(\omega)|^2$$

5. Lo spettro (DT) della sequenza C_k vale

$$\mathcal{F}\{\{C_k\}\} = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega T)$$

Infine

$$G_x(\omega) = \frac{1}{T} |G(\omega)|^2 \left[C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega T) \right]$$

Esplicitando C_k in funzione di $\{a_n\}$:

$$C_k = \langle x_n x_{n+k} \rangle = \langle a_n a_{n+k} \rangle - \langle a_n \rangle^2$$

quindi

$$G_x(\omega) = \frac{1}{T} |G(\omega)|^2 \left\{ \langle a_n^2 \rangle - \langle a_n \rangle^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [\langle a_n a_{n+k} \rangle - \langle a_n \rangle^2] \cos(k\omega T) \right\}$$

Quadro finale (cosa si vede in frequenza)

- **Righe** (componenti discrete) in $\omega = \ell \frac{2\pi}{T}$ dovute a $s_m(t)$, con ampiezze $|c_\ell| = \frac{\langle a_n \rangle}{T} G(j\ell \frac{2\pi}{T})$.
- **Continua** (spettro distribuito) $G_x(\omega)$ pesato da $|G(\omega)|^2$ e dalla coerenza/correlazione della sequenza $\{a_n\}$ tramite i C_k .

In pratica, lo **spettro totale** di $s(t)$ è la **sovrapposizione**:

$$\text{righe dovute alla media } \langle a_n \rangle \quad + \quad \text{continua dovuta alle fluttuazioni } (a_n - \langle a_n \rangle)$$

Intuizioni operative

- Se $\langle a_n \rangle = 0$ le **righe scompaiono**: resta solo lo spettro continuo $G_x(\omega)$.
- Se $\{a_n\}$ è **bianca** e indipendente, allora $C_k = 0$ per $k \neq 0$ e

$$G_x(\omega) = \frac{1}{T} |G(\omega)|^2 C_0$$

cioè lo spettro continuo segue la sagoma $|G(\omega)|^2$.

- La forma di $g(t)$ agisce come **filtro modellante** in frequenza via $|G(\omega)|^2$; la **statistica** di $\{a_n\}$ (tramite i C_k) determina il contenuto di bassa/alta frequenza del continuo.

PAM spiegato pancia–cervello

L'idea in una riga

PAM = prendi una sequenza di numeri e usala per **alzare/abbassare l'altezza** di una serie di **impulsi** tutti uguali e distanziati di T secondi. L'altezza del n -esimo impulso è il numero a_n .

Immagina un nastro trasportatore che passa ogni T secondi; sopra ogni "piattaforma" metti una scatola alta a_n . La forma della piattaforma è $g(t)$ (rettangolino, campana, ecc.). La fila di piattaforme è sempre la stessa; quello che cambia, quindi, è **quanto** le alzi: i **pesi** a_n .

$$s(t) = \sum_n a_n g(t - nT)$$

- $g(t)$ = "forma" dell'impulso (quanto è largo, smussato, ecc.).
- T = quanto sono distanti gli impulsi nel tempo.
- a_n = i tuoi **pesi** o **ampiezze**: i dati che vuoi trasmettere.

A cosa serve? È uno **stadio base** di un sacco di sistemi reali:

- vecchia telefonia/PCM: prima si fa PAM, poi si quantizza → bit;
- Ethernet e linee ad alta velocità: usano versioni evolute (PAM-3/4/5, ecc.);
- in generale: è un **modo semplice per portare numeri su un filo** come altezze di impulsi.

“Potenza finita” vs “potenza media”

Due famiglie di segnali:

- **Segnali a energia finita**: accadono e finiscono (uno "sparo" singolo). L'energia totale è finita. Sono perfetti per modelli tipo "ho emesso un impulso".
- **Segnali a potenza media finita**: esistono per tempi lunghi/infiniti, ma con **potenza media** limitata. Una musica alla radio che va "per sempre" non ha energia totale finita (andrebbe all'infinito), ma la **media nel tempo** della potenza resta ragionevole.

Nel PAM tipico hai un segnale che dura "sempre" → ragioni di **potenza media** più che di energia totale.

Cos'è l'autocorrelazione (senza formule complicate)

Prendi il tuo segnale, fanne una copia e **slidala** nel tempo. A ogni spostamento chiediti: "quanto assomiglia a com'era prima?".

Se a spostamento τ l'assomiglianza è alta, vuol dire che nel segnale c'è una **regolarità** con periodo circa τ .

Autocorrelazione = “misuratore di somiglianza con se stessi con uno slittamento”.

Perché la vogliamo? Perché la sua trasformata di Fourier dà lo **spettro di potenza**: quali frequenze “consumano” quanta potenza.

Regola d'oro (Wiener–Khinchin): autocorrelazione \rightarrow trasformata \rightarrow spettro di potenza.

Perché nello spettro compaiono “righe” e “nuvole”

Spezzettiamo i pesi in “media” + “oscillazioni”:

$$a_n = \langle a \rangle + x_n$$

- La **media** $\langle a \rangle$ fa sì che, oltre alle oscillazioni, tu stia anche mettendo sempre un pochino di segnale a ogni impulso. Questo genera uno **spettro a righe** (tipo un pettine) a frequenze multiple di $1/T$. Intuitivamente: qualcosa che si ripete rigidamente ogni T secondi \rightarrow ha frequenze “discrete”.
- Le **oscillazioni** x_n (che in media fanno zero) sono il “contenuto informativo”. Queste non sono perfettamente periodiche \rightarrow producono uno **spettro continuo** (una “nuvola” di frequenze) la cui forma è modellata da $|G(\omega)|^2$ (cioè dalla forma dell'impulso).

Quindi lo spettro totale è:

- **pettine di righe** se la media è diversa da zero;
- **nuvola continua** dovuta ai dati veri e propri;
- spesso è la **sovrapposizione** delle due cose.

Se imposti $\langle a \rangle = 0$ (sequenza “centrata”) spariscono le righe e resta solo la nuvola: è il caso spesso voluto in comunicazioni.

Che ruolo ha la forma dell'impulso $g(t)$?

$g(t)$ è un **filtro modellante**: dice come la potenza dei tuoi dati si distribuisce in frequenza. Impulsi più larghi nel tempo \rightarrow spettro più stretto; impulsi più stretti \rightarrow spettro più largo. $|G(\omega)|^2$ è proprio la “sagoma” con cui viene pesata la nuvola spettrale.

Intuizioni rapide che aiutano

- T piccolo \Rightarrow impulsi fitti \Rightarrow “pettine” più largo (righe più distanti) ma spettro totale più esteso.
 - $g(t)$ smussato \Rightarrow meno “spigoli” \Rightarrow meno alta frequenza indesiderata.
 - sequenza a_n “casuale” e a media zero \Rightarrow niente righe; la densità spettrale segue $|G(\omega)|^2$.
 - sequenza a_n con correlazione (dipendenza tra a_n e a_{n+k}) \Rightarrow la nuvola non è piatta: compaiono “ondulazioni” nella sua forma.
-

Perché usare il PAM (vantaggi pratici)

- **Semplicità hardware:** generare impulsi e scalarne l'altezza è facile.
 - **Compatibilità:** è un mattoncino intermedio prima di passare ai bit (PCM) o per costruire schemi multi-livello efficienti (PAM-4 in link veloci).
 - **Controllo di banda:** scegliendo $g(t)$ controlli l'occupazione spettrale e l'interferenza tra impulsi.
-

Riassunto in 4 punti

1. PAM = impulsi uguali spaziatosi di T ma con altezze a_n che portano il dato.
2. La **media** dei a_n crea **righe** periodiche nello spettro; le **variazioni** creano una **nuvola continua**.
3. La forma dell'impulso $g(t)$ modella la nuvola tramite $|G(\omega)|^2$.
4. Serve perché è un modo robusto e semplice per trasformare numeri in un segnale fisico trasmissibile/filtrabile.

Se vuoi, ti faccio un mini disegno “pettine+nuvola” o un esempio numerico con un $g(t)$ rettangolare e due diverse sequenze a_n (media zero vs non zero) così vedi comparire o sparire le righe.

Differenza tra PAM e PCM (spiegato chiaro e visivo)

1 PAM – Pulse Amplitude Modulation

Cosa fa:

Il PAM prende un segnale continuo (es. voce) e lo **campiona** a intervalli regolari T . Ogni campione diventa un impulso, e l'**altezza dell'impulso** rappresenta **quanto vale il segnale in quell'istante**.

💡 In pratica:

- l'altezza dell'impulso cambia in modo continuo;
- stai ancora lavorando con **ampiezze analogiche**.

Esempio:

un segnale $s(t) \rightarrow$ campionato ogni $T \rightarrow$ impulsi di ampiezza $a_n = s(nT)$.

$$s_{PAM}(t) = \sum_n s(nT) g(t - nT)$$

👉 Quindi il PAM è una **modulazione analogica** (anche se il tempo è discretizzato).

2 PCM – Pulse Code Modulation

Cosa fa:

Parte dal **PAM** e fa un passo in più:

1. Campiona (come PAM)
2. **Quantizza** i livelli d'ampiezza in valori discreti (es. da 0 a 255)
3. **Codifica** ogni livello in **bit**

💡 In pratica:



- ogni impulso PAM viene sostituito da un gruppo di bit;
- la trasmissione diventa completamente **digitale**.

Esempio:

- un impulso PAM alto "0.62 V" \rightarrow livello 158 \rightarrow codice binario `10011110`.

👉 Quindi il PCM è una **versione digitalizzata del PAM**.

3 Metafora intuitiva

Fase	Nome	Cosa fai	Tipo di segnale
 1	PAM	Campioni la forma del segnale e la metti in altezze di impulsi	analogico
 2	PCM	Sostituisci ogni altezza con un numero (quantizzazione) e poi con bit	digitale

4 Esempio concreto

Immagina di voler mandare la voce su un filo.

Passaggio	Descrizione	Segnale risultante
1 PAM	prendi 8000 campioni al secondo della voce e rappresentali come impulsi di diversa altezza	treno di impulsi analogici
2 PCM	arrotonda ogni altezza su 256 livelli e converti in 8 bit	sequenza digitale di 0 e 1

Così funziona la **telefonia digitale classica (G.711)**:

- 8 kHz di campionamento (PAM)
- 8 bit di quantizzazione (PCM) → 64 kbps per canale voce.

<https://youtu.be/ZjaBn93YPWo>

<https://youtu.be/hOvE8puBZK4>

Il protocollo CSMA-CD ricavare l'espressione del throughput S in funzione del parametro a . Disegnarne il grafico

CSMA, CSMA/CD e throughput in funzione di a

Questa nota riassume e unifica gli appunti e le slide del prof:

- che cos'è CSMA e le sue varianti (non-persistent, 1-persistent, p -persistent);
- come funziona CSMA/CD (rilevazione collisioni);
- come si ricava l'espressione del throughput S di CSMA/CD in funzione del parametro a ;
- perché le curve di prestazioni cambiano al variare di N e di a .

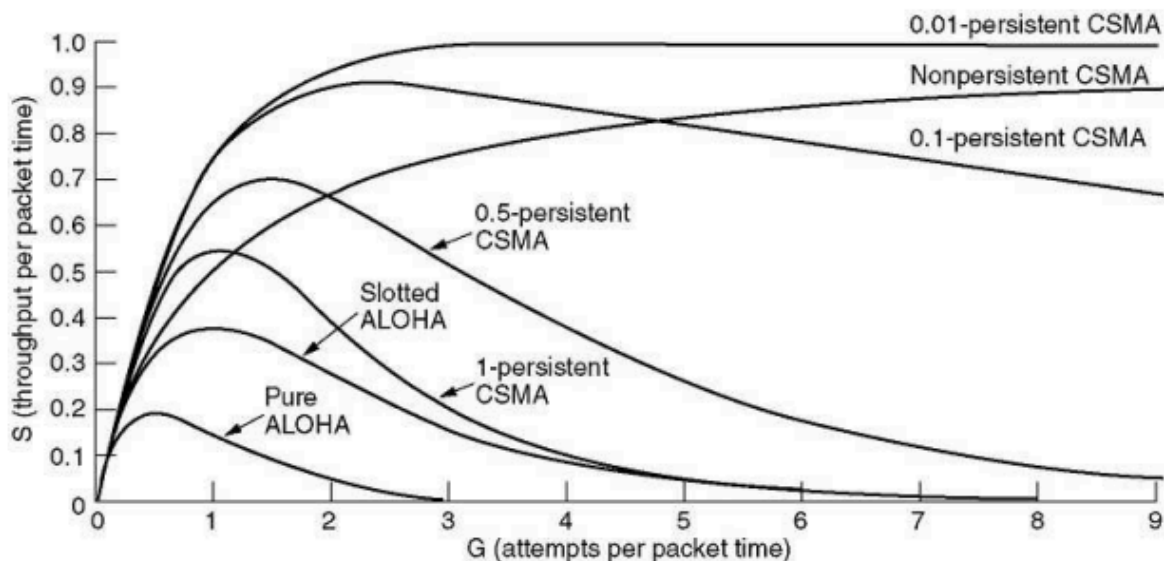
Ripasso rapido: CSMA e varianti

In **Carrier Sense Multiple Access (CSMA)** ogni stazione ascolta il mezzo prima di trasmettere.

- **non-persistent CSMA**: se il mezzo è occupato, si aspetta un ritardo casuale e si ritenta.

- **1-persistent CSMA**: se il mezzo è occupato, si continua ad ascoltare e si trasmette subito appena diventa libero.
- **p -persistent CSMA (slotted)**: se il mezzo è libero si trasmette con probabilità p (oppure si aspetta un time-slot con probabilità $1 - p$).

Queste scelte cambiano l'offerta di traffico e quindi la probabilità di collisione. Tipicamente, a parità di carico, **non-persistent** massimizza lo **throughput** ma introduce più ritardo; **1-persistent** è più aggressivo (più collisioni); **p -persistent** media tra i due regolando p .



CSMA/CD: idea operativa

CSMA/CD (Collision Detection) aggiunge la rilevazione delle collisioni: mentre trasmette, la stazione continua ad ascoltare il mezzo; se rileva una collisione:

- interrompe subito l'invio del frame;
- trasmette un segnale di jamming per informare tutti;
- effettua un backoff casuale e ritenta.

Questo evita di "sprecare" l'intero tempo di trasmissione quando due nodi collidono: si perde al più il **tempo di propagazione** necessario a rendersi conto della collisione, non l'intero frame.

Modellino per derivare $S(a)$

Normalizzazione dei tempi e definizione di a

Si introduce un **time-slot** pari a 2τ , dove τ è il **ritardo di propagazione end-to-end** del bus. Un time-slot è quindi il tempo massimo per essere certi di rilevare una collisione.

Normalizziamo il **tempo di trasmissione di un frame** a 1. Definiamo:

1) Dimostrare e descrivere il teorema del campionamento nel dominio dei tempi

$$a = \frac{\tau}{T_{\text{frame}}} \Rightarrow \text{slot} = 2\tau = 2a T_{\text{frame}}.$$

Misurando tutto in **slot**, la durata di un frame è:

$$\frac{T_{\text{frame}}}{2\tau} = \frac{1}{2a} \text{ slot}.$$

Intuizione: più piccolo è a (propagazione breve rispetto alla durata del frame, o frame più lunghi), più è efficiente CSMA/CD.

Probabilità di “tentativo riuscito” per slot

Consideriamo N stazioni identiche; in ciascuno slot ognuna tenta di trasmettere con probabilità p (modellino p -persistent per l'analisi).

La probabilità che **esattamente una** stazione tenti in uno slot è:

$$A = Np(1-p)^{N-1}.$$

A è massima per $p = \frac{1}{N}$, e vale:

$$A^* = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-1} \approx e^{-1} \text{ per } N \text{ grande.}$$

Lunghezza media dell'intervallo di contesa w

La sequenza di slot di contesa è geometrica: con probabilità A “finisce” (c'è esattamente un tentativo), con probabilità $1 - A$ prosegue.

La lunghezza media, in slot, è:

$$E[w] = \sum_{i=1}^{\infty} i(1-A)^i A = \frac{1-A}{A}.$$

Ciclo “contesa + trasmissione” e throughput

Ogni ciclo utile contiene:

- un intervallo di contesa medio $E[w]$ slot;
- un overhead fisso di **1 slot** per la finestra vulnerabile/detection (serve a “chiudere” il ciclo con collisioni rilevate);
- una trasmissione di lunghezza $\frac{1}{2a}$ slot.

Quindi la **frazione di tempo** spesa in trasmissioni utili (throughput S) è:

$$S = \frac{\frac{1}{2a}}{\frac{1}{2a} + 1 + \frac{1-A}{A}}.$$

Semplificando:

$$S = \frac{1}{1 + 2a \frac{1-A}{A}}$$

Questa è l'espressione chiave che volevi: **throughput CSMA/CD in funzione di a e di A** .

Se scegliamo $p = \frac{1}{N}$ (massimizza A), otteniamo A^* e quindi:

$$S(a) = \frac{1}{1 + 2a \frac{1-A^*}{A^*}} \quad \text{con} \quad A^* = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-1} \approx e^{-1}.$$

Per N grande ($A^* \approx e^{-1}$):

$$\frac{1 - A^*}{A^*} \approx \frac{1 - e^{-1}}{e^{-1}} \approx 1.718 \Rightarrow S(a) \approx \frac{1}{1 + 3.436 a}.$$

Interpretazione delle curve

- $a \rightarrow 0$ (propagazione trascurabile o frame lunghi): $S \rightarrow 1$. Quasi tutto il tempo è utile.
- a **grande** (propagazione comparabile o maggiore del tempo di trasmissione): S decresce perché la finestra vulnerabile/detection pesa di più.
- N influenza A : con molti nodi, anche ottimizzando p , A scende leggermente, perciò il rapporto $\frac{1-A}{A}$ cresce e il throughput cala.

//grafico su $S(a)$ per $N = 2$ e $N = 10$ usando $p = 1/N$

//grafico su sensibilità di $S(a)$ al variare di p rispetto a $p = 1/N$

Collegamento con i grafici classici

- Le curve tipo “ $N = 2$ CSMA/CD” e “ $N = 10$ CSMA/CD” mostrano proprio S che crolla quando a aumenta: con più nodi (più contesa) la curva è più bassa.

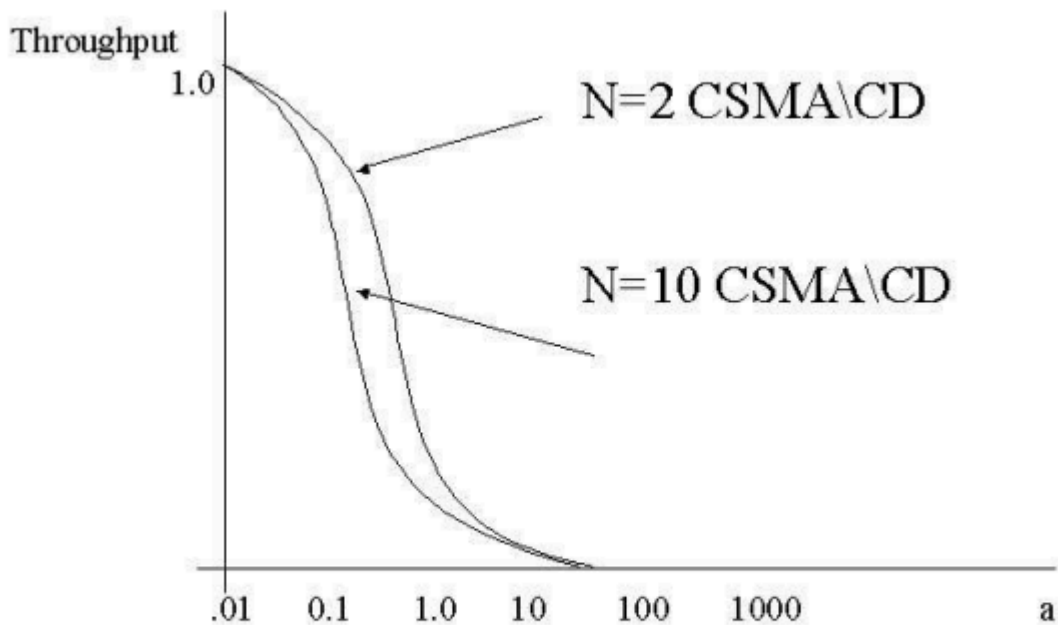
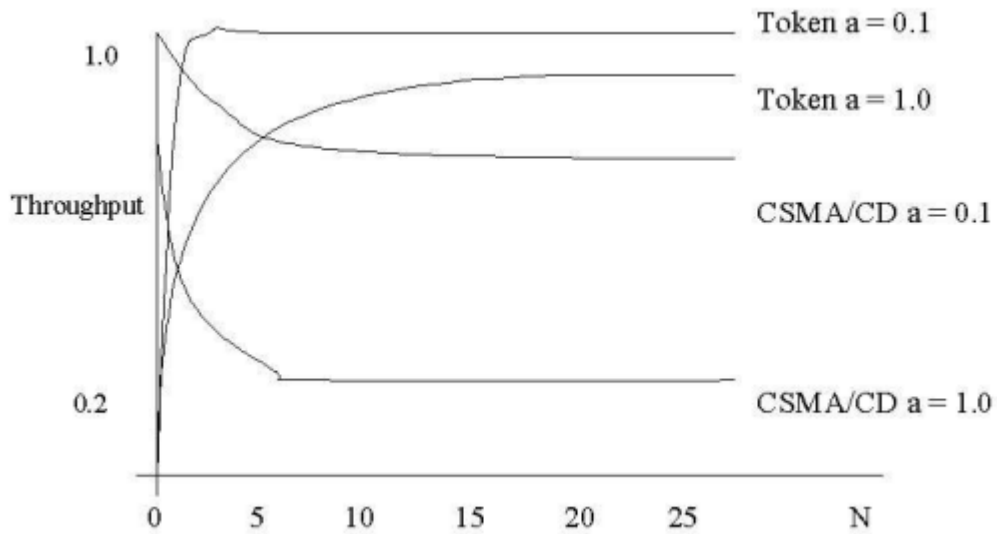


Figure 4: Throughput in funzione di a .

- Nelle tavole comparative, **CSMA** (soprattutto non-persistent) domina **ALOHA** e **Slotted ALOHA** perché il carrier sensing elimina molte collisioni prima che avvengano, e in CSMA/CD le collisioni, quando capitano, costano solo il tempo di propagazione, non l'intero frame.

//grafico su confronto: Pure ALOHA, Slotted ALOHA, 1-persistent, 0.5-persistent, non-persistent

Riepilogo formula finale

$$S(a) = \frac{1}{1 + 2a \frac{1-A}{A}}, \quad A = Np(1-p)^{N-1}, \quad A^* \text{ per } p = \frac{1}{N}.$$

- $a = \tau/T_{\text{frame}}$: ritardo di propagazione normalizzato.
- $\text{slot} = 2\tau$.
- $\text{durata frame} = \frac{1}{2a}$ slot.
- $E[w] = \frac{1-A}{A}$ slot.

Con $A \approx e^{-1}$:

$$S(a) \approx \frac{1}{1 + 3.436 a}$$

Suggerimento pratico: per massimizzare S conviene ridurre a (propagazione breve, frame più lunghi) e regolare l'aggressività delle stazioni (p) per tenere A alto ma senza esplodere in collisioni.

Ricavare e disegnare gli spettri di ampiezza e di fase di un'oscillazione modulata a prodotto

(libro 6.5, pdf:227)

Spettri di ampiezza e fase di un'oscillazione modulata a prodotto

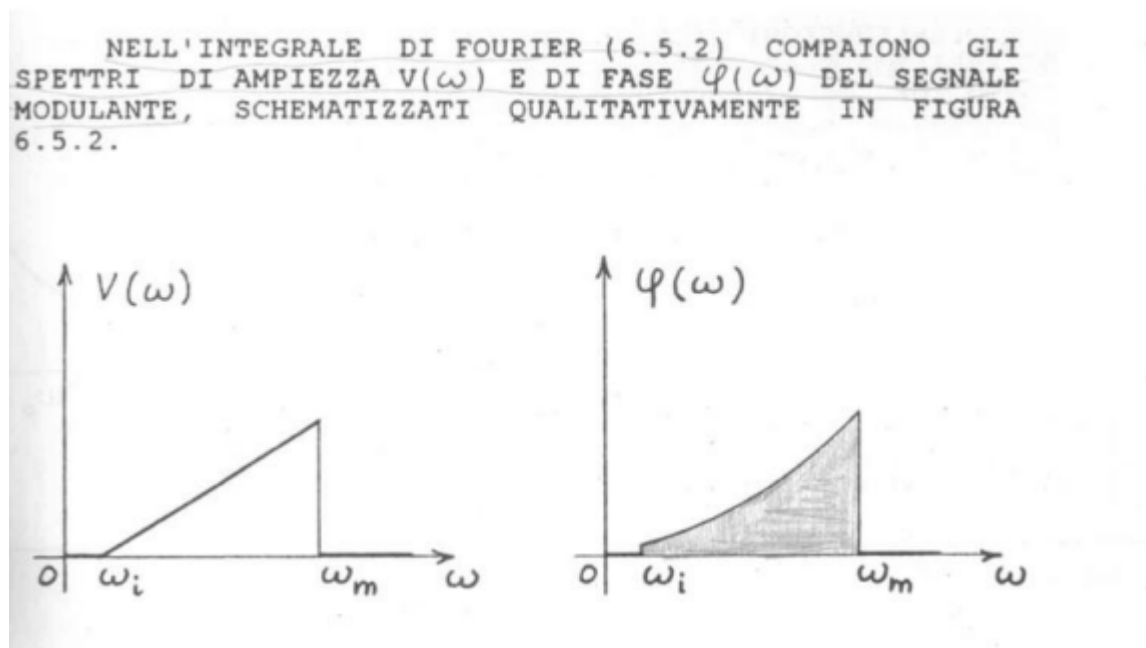
Vogliamo i **due spettri** (ampiezza e fase) del segnale

$$s(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$$

dove il modulante reale $x(t)$ è descritto in forma ampiezza-fase (solo frequenze positive):

$$x(t) = \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega$$

e la portante è $v_0(t) = \cos(\omega_0 t)$.



Passi chiave della derivazione

1. Sostituisco $x(t)$ in $s(t)$ e uso $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$:

$$s(t) = \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos(\omega_0 t) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega$$

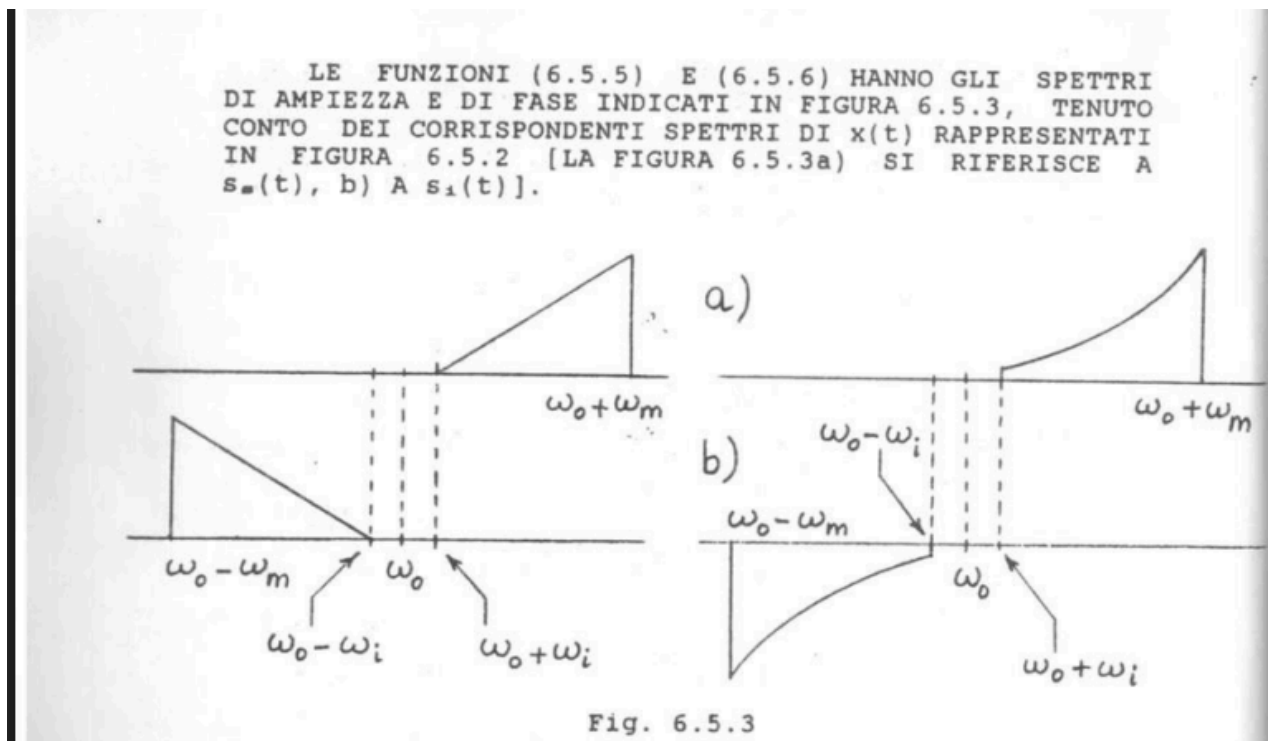
$$= \frac{1}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos((\omega_0 + \omega)t - \varphi(\omega)) d\omega + \frac{1}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos((\omega_0 - \omega)t + \varphi(\omega)) d\omega$$

2. Definisco le **due bande laterali**:

$$s_s(t) = \frac{1}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos((\omega_0 + \omega)t - \varphi(\omega)) d\omega$$

$$s_i(t) = \frac{1}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos((\omega_0 - \omega)t + \varphi(\omega)) d\omega$$

$$s(t) = s_s(t) + s_i(t)$$



3. Leggo direttamente gli **spettri** delle due componenti confrontandole con la forma $\int A(\Omega) \cos(\Omega t - \Phi(\Omega)) d\Omega$.

- **Banda laterale superiore** ($\Omega = \omega_0 + \omega$):
 - intervallo di frequenze: $\Omega \in [\omega_0 + \omega_i, \omega_0 + \omega_m]$
 - ampiezza:

$$V_s(\Omega) = \frac{1}{2} V(\Omega - \omega_0)$$

- fase:

$$\Phi_s(\Omega) = \varphi(\Omega - \omega_0)$$

È una **traslazione verso l'alto** di ω_0 dello spettro di $x(t)$, con fattore $1/2$.

- **Banda laterale inferiore** ($\Omega = \omega_0 - \omega$):
 - intervallo di frequenze: $\Omega \in [\omega_0 - \omega_m, \omega_0 - \omega_i]$
 - ampiezza (c'è un **ribaltamento** intorno a ω_0):

$$V_i(\Omega) = \frac{1}{2} V(\omega_0 - \Omega)$$

- fase (oltre al ribaltamento c'è **cambio di segno**):

$$\Phi_i(\Omega) = -\varphi(\omega_0 - \Omega)$$

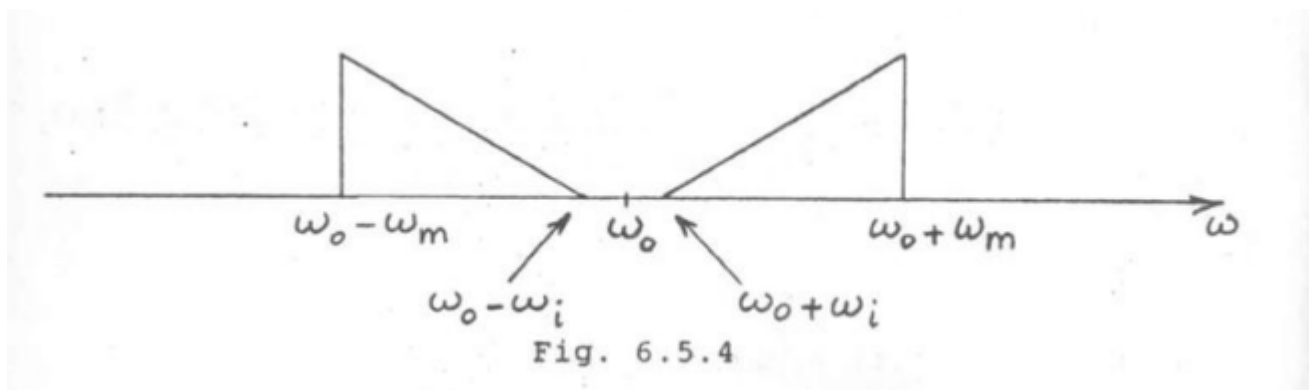
4. Lo **spettro di $s(t)$** (ampiezza/fase) è l'unione delle due bande:

- una copia "dritta" a destra di ω_0 (USB),
- una copia **specchiata** a sinistra di ω_0 (LSB),
- entrambe scalate di $1/2$.

Formalmente, per $\Omega > 0$:

$$V_s^{(tot)}(\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} V(\Omega - \omega_0), & \Omega \in [\omega_0 + \omega_i, \omega_0 + \omega_m] \\ \frac{1}{2} V(\omega_0 - \Omega), & \Omega \in [\omega_0 - \omega_m, \omega_0 - \omega_i] \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\Phi_s^{(tot)}(\Omega) = \begin{cases} \varphi(\Omega - \omega_0), & \Omega \in [\omega_0 + \omega_i, \omega_0 + \omega_m] \\ -\varphi(\omega_0 - \Omega), & \Omega \in [\omega_0 - \omega_m, \omega_0 - \omega_i] \\ \text{non definita}, & \text{altrove} \end{cases}$$



Cosa sta succedendo (intuizione pulita)

- Moltiplicare per $\cos(\omega_0 t)$ **replica** lo spettro di $x(t)$ attorno a $\pm\omega_0$ e **divide per due** le ampiezze.
- La **USB** conserva l'andamento di $V(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ (solo traslazione).
- La **LSB** è lo **spettro specchiato** rispetto a ω_0 ; la fase cambia **segno**.

- Se $x(t)$ è reale e strettamente banda-base su $[\omega_i, \omega_m]$, $s(t)$ è **DSB-SC**: due bande laterali simmetriche attorno a ω_0 .

Regole operative (dirette, da ricordare)

- Traslazione: $+\omega_0$ per la USB, $-\omega_0$ per la LSB.
- Fattore $1/2$ su **entrambe** le bande.
- **USB**: $V(\omega) \rightarrow V(\omega - \omega_0)$, $\varphi(\omega) \rightarrow \varphi(\omega - \omega_0)$.
- **LSB**: ribalta V intorno a ω_0 e **cambia il segno della fase**.
- Lo spettro totale è la **sovrapposizione** delle due copie.

Blocchi e filtri (legame con il libro)

Dalle figure del libro: filtrando $s(t)$ con un passa-banda centrato su ω_0 si può estrarre **una sola banda** (SSB).

Il filtro complesso $H(\omega) = T(\omega)e^{-j\beta(\omega)}$:

- con $T(\omega)$ che seleziona la USB o la LSB,
- e $\beta(\omega)$ che può compensare/ridefinire la fase.

Errori tipici da evitare

- Dimenticare il **fattore 1/2**.
- Disegnare la **LSB senza ribaltamento**.
- Non cambiare il **segno della fase** nella LSB.
- Sommare “le ampiezze” delle due bande come se fossero co-frequenziali: le bande occupano **intervalli disgiunti**, si uniscono **a tratti**.

Mini-riassunto in una riga

Prodotto con $\cos(\omega_0 t) =$ **due copie** di $x(t)$ attorno a ω_0 : USB = copia **traslata**, LSB = copia **specchiata con fase negata**; entrambe scalate di $1/2$.

Riassunto ChatGPT

Oscillazione modulata a prodotto — intuizione e scopo

L'obiettivo di questa sezione è **capire cosa succede a un segnale quando lo moltiplichiamo per una portante**.

In altre parole: vogliamo vedere **come cambia il suo spettro** (cioè la distribuzione delle frequenze) e come si modificano l'**ampiezza** e la **fase**.

1. Cosa stiamo facendo

Prendiamo un segnale $x(t)$ qualsiasi (il **modulante**) e lo moltiplichiamo per un coseno ad alta frequenza $\cos(\omega_0 t)$ (la **portante**):

$$s(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$$

Questo tipo di modulazione si chiama **modulazione a prodotto** o **Double Side Band - Suppressed Carrier (DSB-SC)**.

La portante serve solo a **spostare lo spettro del segnale** da basse frequenze (banda base) verso una frequenza centrale ω_0 .

È quello che succede in ogni trasmissione radio: un segnale audio (qualche kHz) viene “portato” su una frequenza molto più alta (qualche MHz) per poter essere trasmesso.

2. Cosa ci aspettiamo (intuizione spettrale)

Moltiplicare per $\cos(\omega_0 t)$ non è altro che un’**operazione di traslazione in frequenza**.

Infatti, in teoria di Fourier:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

Moltiplicare $x(t)$ per $\cos(\omega_0 t)$ equivale a **creare due copie** dello spettro di $x(t)$:

- una **traslata verso destra** di $+\omega_0$ (banda laterale superiore),
- una **traslata verso sinistra** di $-\omega_0$ (banda laterale inferiore).

Ognuna con ampiezza dimezzata ($1/2$).

In pratica, **lo spettro di $x(t)$ si sdoppia attorno alla portante**.

La parte destra è una copia fedele, la parte sinistra è ribaltata (specchiata).

3. Come lo formalizziamo

Il segnale $x(t)$ può essere descritto tramite il suo spettro in ampiezza $V(\omega)$ e in fase $\varphi(\omega)$:

$$x(t) = \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) d\omega$$

Moltiplicando per $\cos(\omega_0 t)$ e usando l’identità trigonometrica

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)],$$

si ottengono **due integrali separati**, che rappresentano appunto le due bande laterali:

$$s(t) = s_s(t) + s_i(t)$$

- $s_s(t)$: banda **superiore**, spostata in alto di ω_0
- $s_i(t)$: banda **inferiore**, spostata in basso di ω_0 e **ribaltata**

4. Cosa rappresentano le bande laterali

- La **banda laterale superiore (USB)** contiene una **copia diretta** dello spettro di $x(t)$, solo traslata verso ω_0 .
- La **banda laterale inferiore (LSB)** contiene una **copia specchiata** dello spettro di $x(t)$ rispetto a ω_0 .

Le ampiezze sono dimezzate, e nella LSB la fase cambia segno.

5. A cosa serve tutto questo

Lo scopo pratico è capire **come si “trasla” uno spettro** quando si modula in frequenza. Questo è il **principio base della trasmissione dei segnali**:

- La modulazione a prodotto (DSB-SC) serve per **spostare il segnale modulante in una zona di frequenze più alta**, così da poterlo trasmettere via radio senza interferenze con altri segnali.
- Successivamente, filtrando una delle due bande laterali, si può ottenere una **Single Side Band (SSB)**, cioè una trasmissione più efficiente in banda e potenza.

Nel libro infatti, dopo questa derivazione, si introduce un filtro passa-banda $H(\omega) = T(\omega)e^{-j\beta(\omega)}$ per isolare una sola delle due bande laterali.

//inserisci grafico di: schema blocchi $x(t) \rightarrow$ moltiplicatore \rightarrow filtro passa-banda $\rightarrow s_s(t)$

6. In sintesi

- $x(t)$: segnale modulante in banda base.
- $\cos(\omega_0 t)$: portante.
- $s(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$: segnale modulato, con due bande laterali attorno a ω_0 .

- **Spettro:** due copie dello spettro di $x(t)$, una traslata in alto, una ribaltata in basso.
 - **Uso pratico:** traslazione di frequenza, base della radio e telecomunicazioni.
-

7. Intuizione finale

In tempo, moltiplichi due segnali.

In frequenza, **sposti e ribalti** uno spettro.

È un'operazione di **traslazione spettrale**: niente magia, solo un cambio di “posizione” nel dominio delle frequenze.

Questo è il cuore della modulazione: prendere un'informazione lenta, e portarla dove serve per trasmetterla o elaborarla più facilmente.

Bonus

Perché si modulano i segnali in frequenza (come nelle radio)

1. Il problema di partenza

Il segnale che vogliamo trasmettere (voce, musica, dati) è un segnale **a bassa frequenza** — tipicamente da pochi hertz a qualche kilohertz.

In altre parole, il suo spettro è tutto concentrato vicino a zero.

E questo è un grosso problema per tre motivi:

1. **Non si propaga bene:**

le onde elettromagnetiche a bassa frequenza hanno lunghezze d'onda enormi (centinaia o migliaia di chilometri).

Servirebbero antenne gigantesche per trasmetterle in modo efficiente.

2. **Non puoi distinguere i canali:**

se tutti i segnali sono “attaccati” allo zero, si sovrappongono.

Non potresti avere due radio diverse: si mischierebbero nello stesso intervallo di frequenze.

3. **Non puoi filtrare selettivamente:**

i circuiti elettronici non riescono a isolare o amplificare bene segnali a frequenza bassissima.

Tutto il sistema diventerebbe instabile e rumoroso.

2. La soluzione: la modulazione

L'idea geniale è **spostare lo spettro** del segnale verso una frequenza molto più alta, detta **portante** (ω_0).

$$s(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$$

Questa semplice moltiplicazione (modulazione a prodotto) “copia” lo spettro di $x(t)$ intorno a ω_0 .

Ora il segnale **non è più in banda base**, ma **in banda passante**: occupa un intervallo centrato attorno alla portante.

3. Cosa ci guadagniamo

a) Propagazione efficiente

Le alte frequenze si propagano molto meglio e permettono antenne di dimensioni realistiche. Una radio FM, ad esempio, trasmette intorno a 100 MHz — la lunghezza d'onda è di circa 3 metri, perfetta per antenne compatte.

b) Multiplexing (più canali)

Traslando lo spettro di ogni segnale su **una portante diversa**, possiamo avere più trasmissioni contemporanee **nello stesso spazio**:

$$f_1 = 100.1 \text{ MHz}, \quad f_2 = 100.3 \text{ MHz}, \quad f_3 = 100.5 \text{ MHz}, \dots$$

Ogni radio “sintonizza” solo la portante desiderata, ignorando le altre.

È come spostare ogni voce in una stanza diversa, anziché farle parlare tutte insieme.

c) Compatibilità con i filtri e l'elettronica

Aumentare la frequenza del segnale lo porta in una banda in cui è facile:

- amplificarlo,
- filtrarlo (selezionare o tagliare bande specifiche),
- ridurre interferenze a bassa frequenza (rumore, 50 Hz, disturbi).

d) Efficienza di potenza e banda

In modulazioni più evolute (AM, FM, SSB, QAM, ecc.), la modulazione permette anche:

- di **concentrare la potenza** in una sola banda laterale (Single Side Band),
 - di **adattare il segnale** al canale di trasmissione e alle sue caratteristiche.
-

4. In sintesi

Modulare un segnale significa **traslare il suo spettro** in una regione di frequenze più alta.

Serve a:

- **Trasmettere meglio** (propagazione più efficiente)
 - **Condividere lo spettro** (più canali contemporanei)
 - **Gestire meglio il rumore e i filtri**
 - **Sfruttare meglio la potenza e la banda**
-

5. Una metafora semplice

Immagina che il tuo segnale sia una voce che parla sott'acqua: lenta, smorzata, confusa.

La modulazione è come **mettere quella voce su una barca veloce**:

non cambia il contenuto del messaggio, ma lo **porta lontano e chiaramente**.

6. Collegamento con la teoria vista prima

Quando abbiamo calcolato gli spettri di:

$$s(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$$

stavamo matematicamente descrivendo **questa traslazione spettrale**.

Le due bande laterali che appaiono attorno a ω_0 sono le due "copie" del segnale originale, spostate in alta frequenza.

Quelle bande **sono ciò che viaggia per aria** quando accendi una radio.

8) Il protocollo ALOHA ricavare l'espressione del throughput normalizzato in funzione del traffico. Disegnare il grafico relativo

Contesto: accesso multiplo a contesa

- Più utenti condividono lo stesso canale senza coordinamento rigido.
- Gli utenti trasmettono quando hanno un pacchetto; se due o più trasmettono sovrapposti, c'è **collisione** e si ritrasmette dopo un ritardo casuale.
- Questo approccio sfrutta bene canali con traffico “a picchi”, ma introduce ritardi e perdite dovute alle collisioni.

Grandezze e normalizzazioni

Sia b la lunghezza (in bit) di un pacchetto e R la capacità del canale (bit/s). Definiamo il **tempo di trasmissione** di un pacchetto:

$$\tau = \frac{b}{R}$$

Indichiamo con λ il tasso medio con cui i pacchetti **nuovi** vengono offerti al canale (Poisson). A causa delle collisioni alcuni pacchetti verranno ritrasmessi; chiamiamo λ_r il tasso delle **ritrasmissioni**. Il tasso totale di **tentativi** è:

$$\lambda_t = \lambda + \lambda_r$$

Definiamo due quantità “a-dimensione” per lavorare in unità di “tempo pacchetto” τ :

- **Traffico normalizzato (offerto/di tentativi):**

$$G = \lambda_t \tau$$

- **Throughput normalizzato (buoni a destinazione):**

$$\rho = \frac{\text{bit utili al secondo}}{R} = \lambda \tau$$

Nei grafici classici spesso si usa S per il throughput riuscito. Qui teniamo ρ come nel testo: stessa cosa.

Osservazione chiave: $\rho = G \cdot P_s$, dove P_s è la probabilità che un tentativo vada a buon fine.

Finestra di contesa e probabilità di successo

Gli arrivi sono modellati come Poisson. Perché serve? Perché “nessun altro trasmette in un certo intervallo T ” ha probabilità:

$$\Pr\{0 \text{ arrivi in } T\} = e^{-\lambda T}$$

Pure ALOHA

Un pacchetto è **vulnerabile** a collisioni se qualunque altro inizio cade entro $\pm\tau$ dal suo istante di inizio, perché i pacchetti possono iniziare **in qualunque momento**. La **finestra di**

contesa (vulnerability period) è quindi:

$$T_v = 2\tau$$

La probabilità che **nessun altro** inizi una trasmissione nel periodo vulnerabile è:

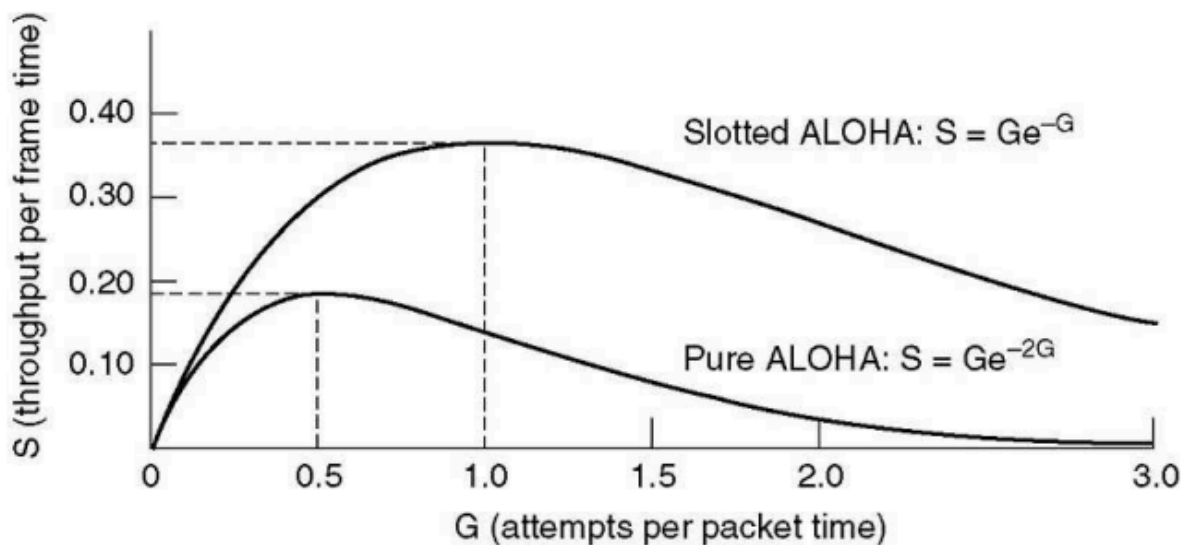
$$P_s = e^{-\lambda_t T_v} = e^{-\lambda_t 2\tau} = e^{-2G}$$

Quindi il throughput normalizzato (pacchetti riusciti per tempo-pacchetto) è:

$$\rho = G P_s = G e^{-2G}$$

Massimo di ρ per pure ALOHA:

$$\frac{d}{dG} [G e^{-2G}] = 0 \Rightarrow G^* = \frac{1}{2}, \quad \rho_{\max} = \frac{1}{2e} \approx 0.184$$



Slotted ALOHA

Si introduce una griglia temporale: gli utenti possono iniziare **solo all'inizio dello slot** (di durata τ). Questo dimezza il periodo vulnerabile, perché due pacchetti collidono solo se iniziano **nello stesso slot**:

$$T_v = \tau$$

La probabilità di successo diventa:

$$P_s = e^{-\lambda_t \tau} = e^{-G}$$

Quindi:

$$\rho = G e^{-G}$$

Massimo di ρ per slotted ALOHA:

$$\frac{d}{dG} [G e^{-G}] = 0 \Rightarrow G^* = 1, \quad \rho_{\max} = \frac{1}{e} \approx 0.368$$

Risultato pratico: **slotted raddoppia** il throughput massimo rispetto al pure ALOHA.

Perché “funziona” il modello Poisson qui

- L'ipotesi “molti utenti indipendenti, ciascuno con pacchetti rari” \Rightarrow la somma degli arrivi tende a Poisson (teorema di Palm–Khintchine).
- Con Poisson, l'evento “zero inizi in un intervallo” è esponenziale semplice, che ci dà P_s in una riga.

Da dove saltano fuori le formule degli appunti

1. Si parte da $G = \lambda_t \tau$.
2. Si identifica la finestra di contesa: 2τ (pure) o τ (slotted).
3. Con Poisson: $P_s = e^{-\lambda_t T_v}$.
4. Throughput normalizzato:

$$\rho = G P_s = \begin{cases} G e^{-2G} & \text{pure ALOHA} \\ G e^{-G} & \text{slotted ALOHA} \end{cases}$$

Gli appunti scrivono anche “ $\lambda = \lambda_t e^{-2\lambda_t \tau}$ ” per pure ALOHA: è lo stesso passo 4 risolto “a ritroso”, notando che $\lambda = \lambda_t P_s$ e poi dividendo per R per normalizzare.

Nota del prof su a e l'effetto propagazione

Nei capitoli introduttivi il prof definisce:

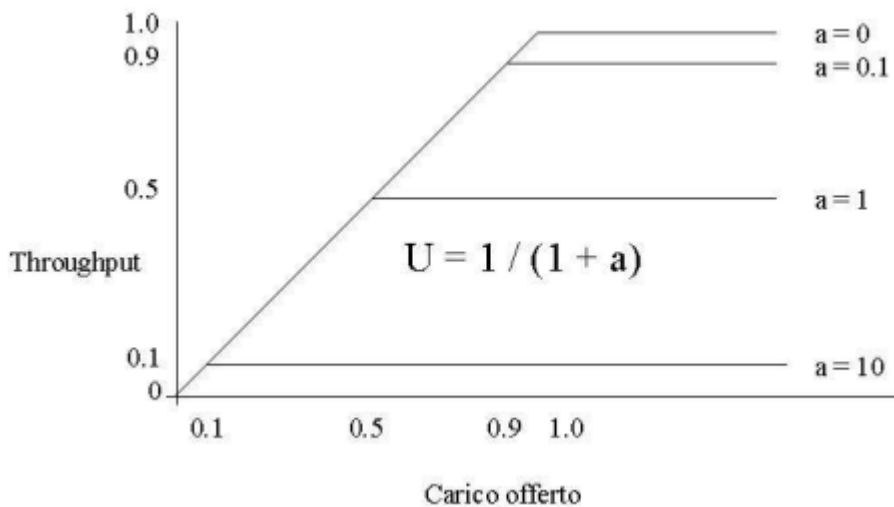
$$a = \frac{Rd}{VL} = \frac{\text{propagation time}}{\text{transmission time}}$$

con V velocità di propagazione, d la distanza, L lunghezza frame. Intuizione:

- Se a cresce, la parte “morta” di propagazione pesa di più rispetto al tempo utile di trasmissione.
- In schemi semplici (senza collisioni) la massima **utilizzazione** idealizzata tende a

$$U_{\max} \approx \frac{1}{1+a}$$

perché ogni frame “si porta dietro” un overhead di propagazione.



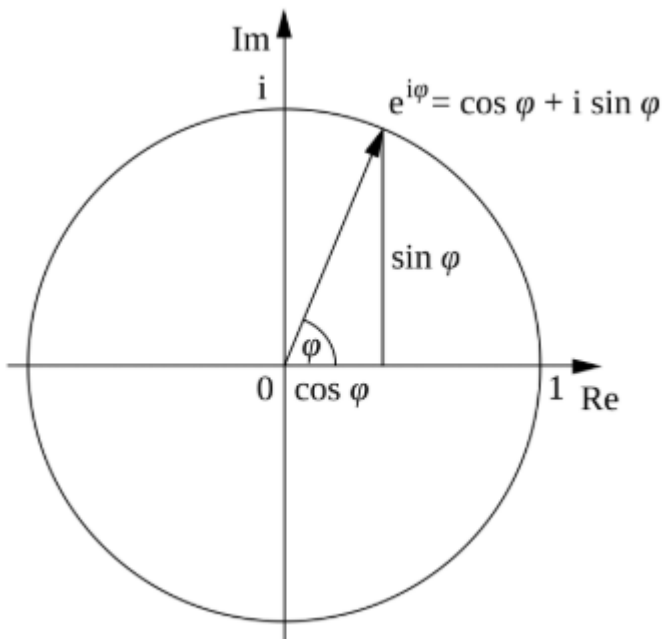
Questo è concettualmente separato da ALOHA, ma spiega perché canali lunghi/larghi di banda hanno più sensibilità ai ritardi di propagazione e quindi perché lo **slotting** (sincronizzazione) aiuta: riduce la finestra di vulnerabilità efficace e “spalma” meglio l’overhead temporale.

Cosa ricordare per l’esame (senza fronzoli)

- **Pure ALOHA:** finestra vulnerabile 2τ , $\rho(G) = Ge^{-2G}$, picco $1/(2e)$ a $G = 0.5$.
- **Slotted ALOHA:** finestra = τ , $\rho(G) = Ge^{-G}$, picco $1/e$ a $G = 1$.
- La differenza di fattore 2 viene **solo** dalla sincronizzazione degli inizi di pacchetto.
- La normalizzazione con τ rende i grafici e le formule indipendenti da b e R .
- Il Poisson serve per ottenere in chiaro “nessun altro inizia” sull’intervallo vulnerabile.
- Il parametro a del prof spiega l’impatto del ritardo di propagazione sul valore massimo di utilizzazione anche fuori dal contesto ALOHA.

Richiami Matematici

I numeri complessi



Guarda [Richiami matematici \(Controlli\)](#)

L'importante di questo corso è la formula di Eulero, da sapere a memoria:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace associa in modo **biunivoco** a una generica funzione reale del tempo $x(t)$ una funzione complessa $X(s)$ della variabile complessa s :

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$$

È definita nel modo seguente:

$$X(s) := \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

La trasformazione inversa viene detta antitrasformata di Laplace:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

È definita nel modo seguente:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X(s)e^{st} ds$$

Quindi tempo (t) \iff complessi (s)

Scenario delle telecomunicazioni e concetti fondamentali

File di origine: *Telecomunicazioni.pdf*

Origini della comunicazione

- Comunicazione umana → basata su vista e udito, ma limitata nello spazio e nel tempo.
- Tecniche per estendere la portata: scrittura, posta, telegrafo.
- Telegrafo di Morse (1835) → prima forma di telecomunicazione moderna.
- Nascita reti telegrafiche: basse velocità, cavi in rame, telescrivente Siemens (1846), ITU (1865).

Telefono

- Meucci (1871) inventa, Bell (1876) brevetta.
- Trasmissione di voce analogica (4 KHz).
- Commutazione di circuito: centrali manuali → automatiche (Strowger 1887).
- Diffusione domestica, grande impatto economico.

Radio

- Marconi (1895): nascita radiocomunicazioni.
- Trasmissioni telegrafiche senza fili → poi voce, musica, immagini.
- Broadcast come caratteristica principale.
- Applicazioni: salvataggio Titanic (1912), radiodiffusione, telediffusione.

Progressi tecnologici

- Elettronica: triodo (1904), transistor (1947), IC anni '70, Legge di Moore.
- Mezzi trasmissivi:
 - Rame: coppie ritorte, coassiali (FDM fino a 10.800 canali).
 - Fibre ottiche (anni '70): attenuazione bassissima, banda enorme, costi bassi.
 - Radio/satelliti: Sputnik (1957), Intelsat (anni '60), GPS, DBS.

Reti radio e cellulari

- Ponti radio e satelliti: economici per aree vaste.
- Problemi: spettro condiviso, interferenze, vulnerabilità ai disturbi.
- Sistemi cellulari:
 - ETACS (anni '80),
 - GSM (2G, digitale),

- UMTS (3G),
- LTE/4G, poi 5G.
- Oggi: utenti mobili > utenti fissi.

Tecniche digitali

- Numerizzazione: conversione A/D, Shannon, PCM (64 Kbit/s).
- TDM: moltiplicazione a divisione di tempo.
- Sincronismo: reti plesiocrone vs sincrone.
- Reti IDN → ISDN (anni '80).

Reti di calcolatori e Internet

- ARPANET (1969), TCP/IP (1983), Internet cresce esponenzialmente.
- Modello OSI (7 strati) → standard teorico, ma vince TCP/IP.
- LAN (anni '80), poi diffusione globale.
- Internet = collezione di reti (LAN, dorsali, ISP).

Multimedialità

- Servizi: voce (VoIP), musica (CD, MIDI), video (TV analogica/digitale).
- Compressione MPEG-2, MPEG-4.
- Servizi: Video on Demand, TV interattiva.

Scenari di rete

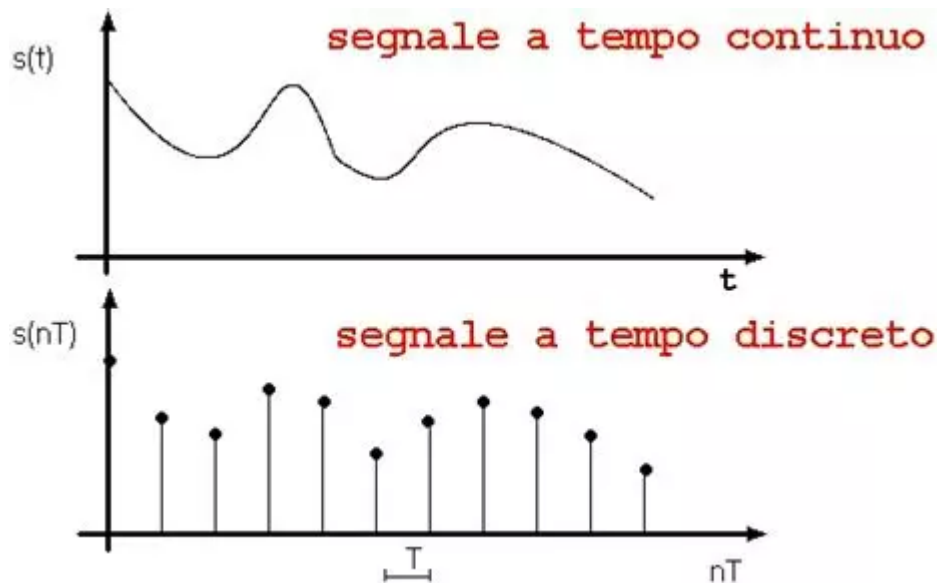
- Tradizionale (fino anni '90): rete telefonica dominante, monopolio ministeri o AT&T.
- Internet-driven: TCP/IP a banda larga, problemi di QoS, sicurezza, tariffazione.
- Mobile-driven: rete accessibile ovunque via cellulare, smartphone = computer, rete fissa solo backbone.

Sfide future

- Microelettronica: chip nanometrici, optoelettronica, microsistemi.
- Informatica: ubiquitous computing, AI, interazione multisensoriale.
- Telecomunicazioni: reti ottiche, sicurezza, localizzazione, VR/AR, presenza virtuale.

Grazie al cielo controlli ci ha dato una grossa mano. Ad ogni modo, prima di iniziare, consiglio di guardare [Richiami Matematici](#).

Tipi di segnali



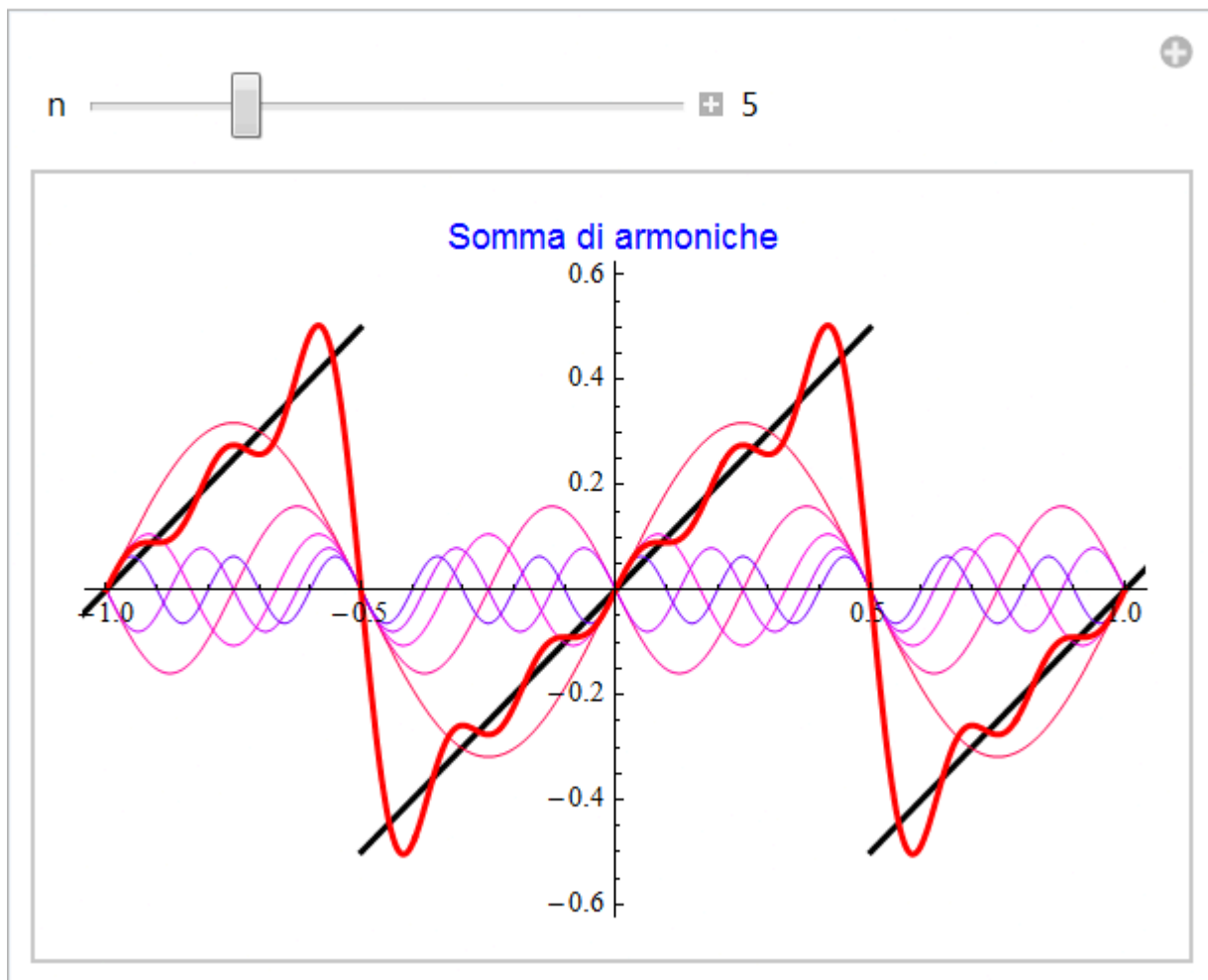
Se un segnale è periodico (continuo o discreto), si applica lo **Sviluppo in serie di Fourier**, se un segnale **non** è periodico allora si applica la **Trasformata di Fourier**

Teoria dei segnali deterministici

Allora, noi vogliamo trasmettere un segnale particolare, però faremo un lungo giro prima di arrivare a questo punto.

Partiamo con i **segnali periodici**, che non sono quelli che vogliamo mandare, ma vedrai in seguito il perché.

Secondo Fourier, se un segnale è periodico (più altre condizioni), allora si può costruire con una somma di infinite sinusoidi. questa cosa è detta **Sviluppo in serie** di Fourier:



Il segnale nero è circa la somma di tutte queste sinusoidi. (Con ∞ sinusoidi sarebbe identico)

Serie di Fourier Complessa

Prerequisiti

1. **Periodicità:** La funzione deve essere periodica. La serie di Fourier è progettata per descrivere funzioni che si ripetono regolarmente con un periodo .
Se la funzione non è periodica, si può comunque applicare una trasformata di Fourier, che è una generalizzazione per funzioni non periodiche.
2. **Funzioni a valori reali o complessi:** La funzione può essere a valori reali o complessi.

3. ⓘ **Condizioni di Dirichlet:** >

Per garantire che la serie di Fourier converga alla funzione originale, è necessario che la funzione soddisfi le condizioni di Dirichlet:

- La funzione deve essere definita e integrabile in modo assoluto su un periodo:

$$\int_0^T |f(x)| dx < \infty$$

- La funzione può avere un numero finito di discontinuità di salto.

- La funzione può avere un numero finito di massimi e minimi in un periodo.

Allora:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

Domanda: ma non avevamo detto che era una somma di *sinusoidi*?

e^x è un'esponenziale...

Ricordiamo che, per **Eulero**:

$$e^{in\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) + i \sin(n\omega_0 t)$$

👉 Quindi la serie di Fourier in forma esponenziale è effettivamente una **somma di sinusoidi** (coseni e seni), solo scritta in modo compatto usando l'esponenziale complesso.

Gli altri termini della formula sono:

- T è il periodo del segnale periodico.
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ è la frequenza angolare fondamentale,
- c_n sono i **coefficienti di Fourier complessi** dati dalla formula:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

Proprietà dei coefficienti (segnale reale)

$$x(t) \in \mathbb{R} \iff c_{-n} = \overline{c_n} \quad \forall n$$

esempio:

$$c_3 = 2 - j5 \quad \Rightarrow \quad c_{-3} = \overline{c_3} = 2 + j5.$$

Serie di Fourier nei Reali

I reali se vogliamo sono un "caso particolare" dei complessi, quindi ci basta prendere la formula dei complessi e semplificare un po'.

I prerequisiti sono sempre gli stessi dei complessi.

Parto dalla serie di Fourier in forma complessa

1) Dimostrare e descrivere il teorema del campionamento nel dominio dei tempi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

e, per segnali reali, dalla proprietà di simmetria coniugata

$$C_{-n} = \overline{C_n} \quad \forall n.$$

1. Scomposizione della somma

la somma di $[-\infty +\infty]$ diventa: $[-\infty -1] + [0] + [-1 + \infty]$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{in\omega_0 t} + C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{in\omega_0 t}$$

e, usando $C_{-n} = \overline{C_n}$,

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{C_n} e^{-in\omega_0 t}.$$

Quindi le somme con $-\infty$ sono uguali a quelle con il $+\infty$:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (C_n e^{in\omega_0 t} + \overline{C_n} e^{-in\omega_0 t}) = C_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Re\{C_n e^{in\omega_0 t}\}.$$

2. Uso di Eulero e parte reale

Per Eulero

$$e^{in\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) + \cancel{i \sin(n\omega_0 t)}.$$

Scrivo C_n in forma polare $C_n = |C_n| e^{i\phi_n}$ con $\phi_n = \arg(C_n)$:

$$C_n e^{in\omega_0 t} = |C_n| e^{i(\phi_n + n\omega_0 t)}.$$

Allora

$$\Re\{C_n e^{in\omega_0 t}\} = |C_n| \Re\{e^{i(\phi_n + n\omega_0 t)}\} = |C_n| \left[\cos(\phi_n + n\omega_0 t) + \cancel{i \sin(\phi_n + n\omega_0 t)} \right] = |C_n| \cos(n\omega_0 t)$$

Ne segue

$$f(t) = C_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |C_n| \cos(n\omega_0 t + \phi_n).$$

3. Passaggio alla forma seno-coseno

Definisco i coefficienti reali

$$a_0 = 2C_0, \quad a_n = 2\Re\{C_n\}, \quad b_n = -2\Im\{C_n\},$$

equivalentemente

$$2C_n = a_n - i b_n = A_n e^{i\theta_n}, \quad A_n = 2|C_n|, \quad \theta_n = \phi_n.$$

Otengo la forma classica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

che è esattamente equivalente alla serie complessa iniziale per $f(t) \in \mathbb{R}$.

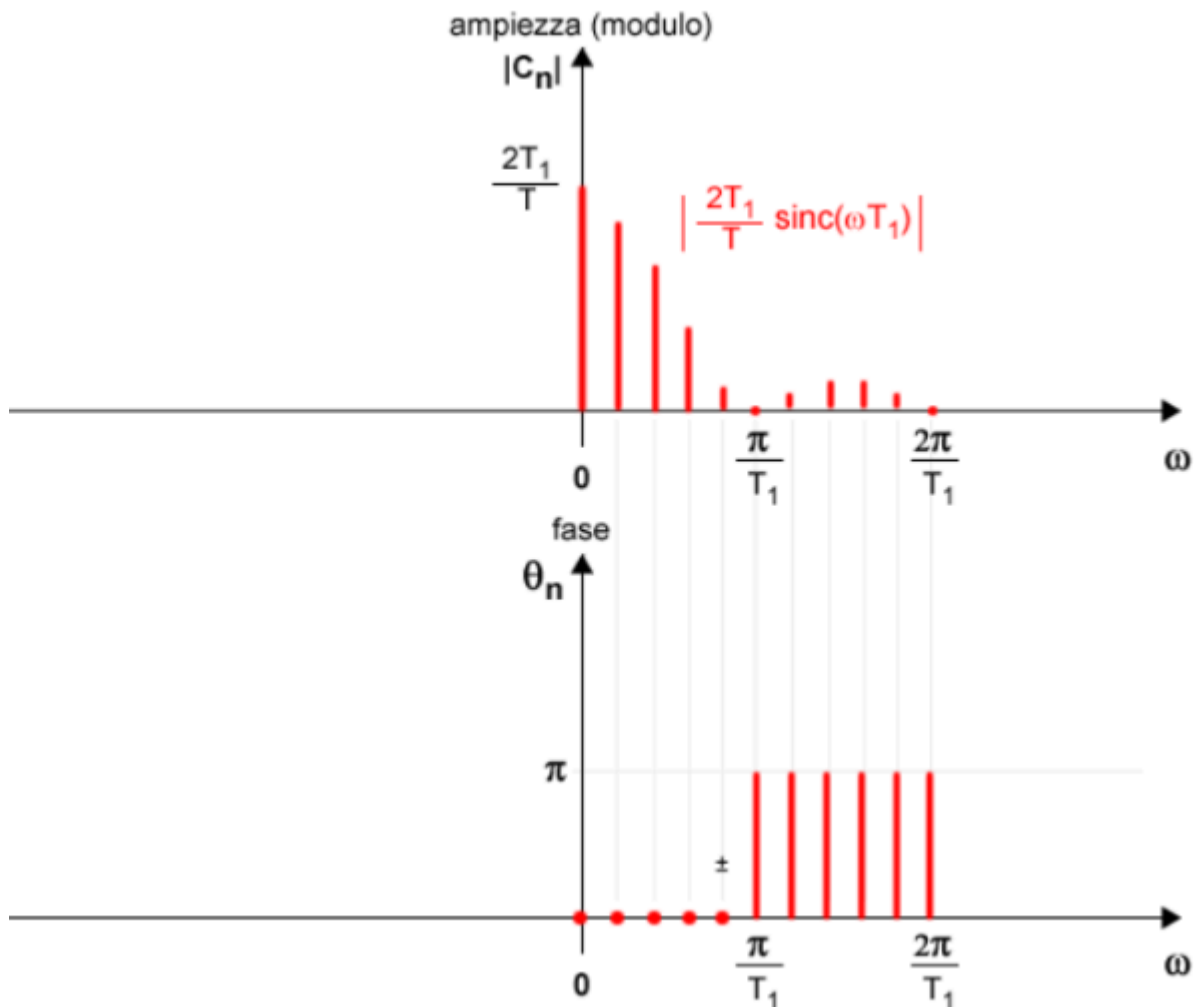
Calcolo dei coefficienti:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

Inoltre possiamo plottare:

- A_n : spettro di ampiezza
- θ_n : spettro di fase



vedremo che certi elementi delle sommatoria non sono così importanti perché i valori sono tendenti a zero e noi allora potremmo ignorarli per approssimare il segnale.

Trasformata di Fourier nei complessi

questa si applica a segnali **aperiodici**, che sono quelli che ci interessano.

sia $f(t)$ un segnale aperiodico nel tempo. esso può essere visto come un segnale periodico $F(\omega)$.

Questa forma si usa per **segnali aperiodici** (tipicamente di **energia finita**).

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

Inversa:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Osservazioni rapide (chatGPT)

- Un segnale aperiodico si può vedere come **limite** di un periodico quando il periodo $T \rightarrow \infty$; non “diventa periodico”, ma la serie di Fourier passa a uno **spettro continuo**.
- La corrispondenza $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ è biunivoca sotto ipotesi blande (ad es. $x \in L^2$) e vale anche in senso di **distribuzioni** per segnali ideali.
- Altre convenzioni spostano i fattori 2π (es. versione unitaria con $1/\sqrt{2\pi}$): scegli una convenzione e mantienila coerente in tutto il corso.

Trasformata di Fourier nei reali

Se $x(t)$ è **reale**, la sua trasformata di Fourier $X(\omega)$ soddisfa la **coniugata simmetria**:

$$X(-\omega) = \overline{X(\omega)}.$$

Questo implica:

- il **modulo** è **pari** (simmetrico):

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)|.$$

- la **fase** è **dispari** (antisimmetrica), quando definita:

$$\arg X(-\omega) = -\arg X(\omega).$$

Ricostruzione (inversa) in forma reale

La trasformata inversa è

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Scriviamo $X(\omega)$ in forma polare:

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{i\phi(\omega)}, \quad \phi(\omega) = \arg X(\omega).$$

Allora

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)| e^{i(\omega t + \phi(\omega))} d\omega.$$

Separando parte reale e immaginaria con Eulero,

$$e^{i(\omega t + \phi(\omega))} = \cos(\omega t + \phi(\omega)) + i \sin(\omega t + \phi(\omega)).$$

Poiché $x(t)$ è reale e valgono $|X(-\omega)| = |X(\omega)|$ e $\phi(-\omega) = -\phi(\omega)$, l'integrale delle parti immaginarie si **annulla** tra ω e $-\omega$. Rimane quindi

1) Dimostrare e descrivere il teorema del campionamento nel dominio dei tempi

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)| \cos(\omega t + \phi(\omega)) d\omega.$$

In alternativa, usando una forma **a un solo lato**:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |X(\omega)| \cos(\omega t + \phi(\omega)) d\omega.$$

Notazione con densità di ampiezza e fase

Definiamo la **densità spettrale di ampiezza**

$$V(\omega) = \frac{|X(\omega)|}{2\pi}$$

e la **densità spettrale di fase**

$$\phi(\omega) = \arg X(\omega)$$

Allora la sintesi reale si scrive in modo compatto

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)) d\omega,$$

oppure, equivalentemente (forma a un lato),

$$x(t) = 2 \int_0^{+\infty} V(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)) d\omega$$

In soldoni

- Se il segnale nel tempo è **reale**, lo spettro a frequenza negativa è il **coniugato** di quello a frequenza positiva. Tradotto: le ampiezze sono uguali a $+\omega$ e $-\omega$, e le fasi sono opposte.
- Per ricostruire $x(t)$ dallo spettro $X(\omega)$ puoi pensarlo come una **somma continua di coseni**: a ogni frequenza prendi un coseno con **ampiezza** data dal modulo dello spettro e **fase** data dall'argomento dello spettro, e somma su tutte le frequenze.
- La forma "a due lati" ha il fattore $1/(2\pi)$; usando le simmetrie puoi passare alla forma "a un lato" con il fattore $1/\pi$. Definendo $V(\omega) = |X(\omega)|/(2\pi)$, la formula diventa una semplice integrale di $V(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega))$.

Proprietà (Fourier) dei segnali + Teorema di Convoluzione

Convenzione in ω :

1) Dimostrare e descrivere il teorema del campionamento nel dominio dei tempi

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

(Nelle formule puoi usare j al posto di i : $j \equiv i$.)

1. Trasformata

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$$

2. Traslazione nel tempo

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) e^{-i\omega t_0}$$

3. Derivazione nel tempo

$$\frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} i\omega X(\omega)$$

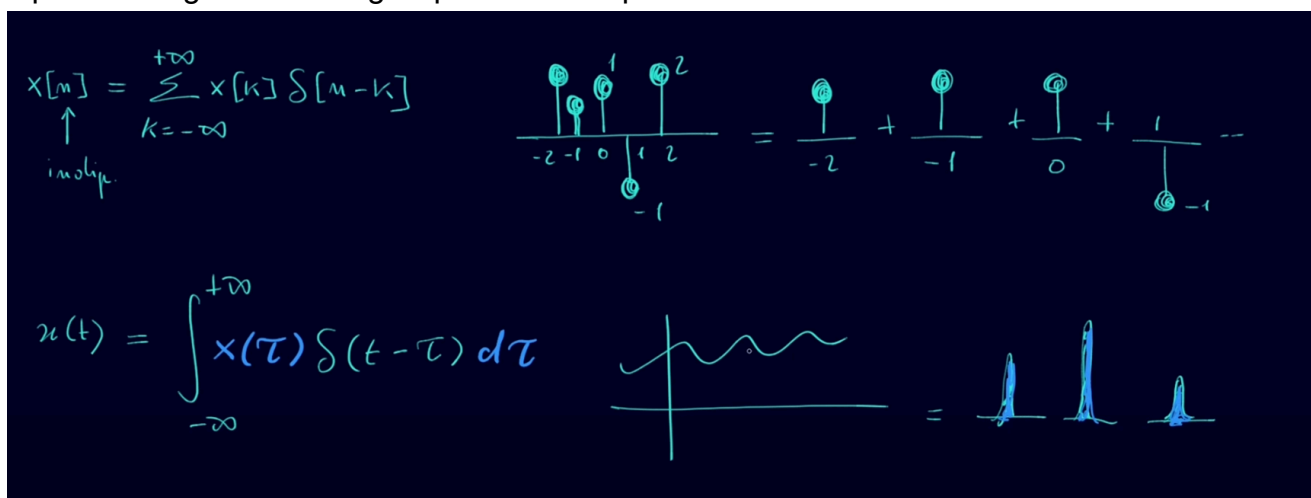
4. Integrazione (antiderivata causale)

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{X(\omega)}{i\omega} + \pi X(0) \delta(\omega)$$

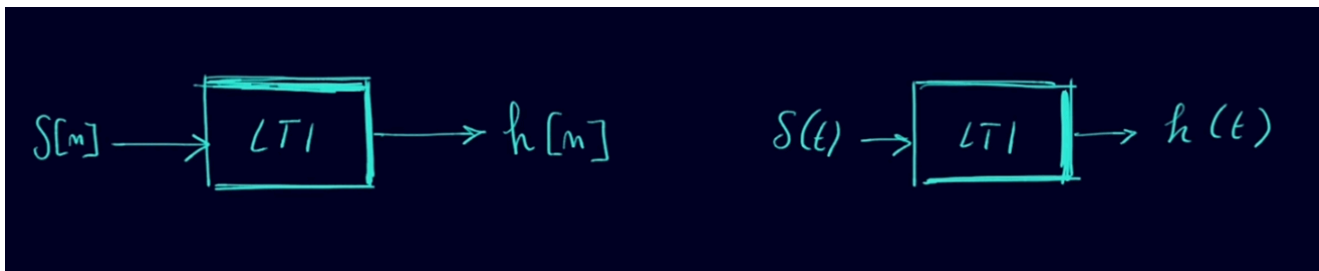
Se $x(t)$ ha **valore medio nullo** ($X(0) = 0$), il termine con $\delta(\omega)$ si annulla e resta $X(\omega)/(i\omega)$.

Roba esterna per capirci qualcosa

Il prof fa dei grossi salti logici. partiamo da questo.



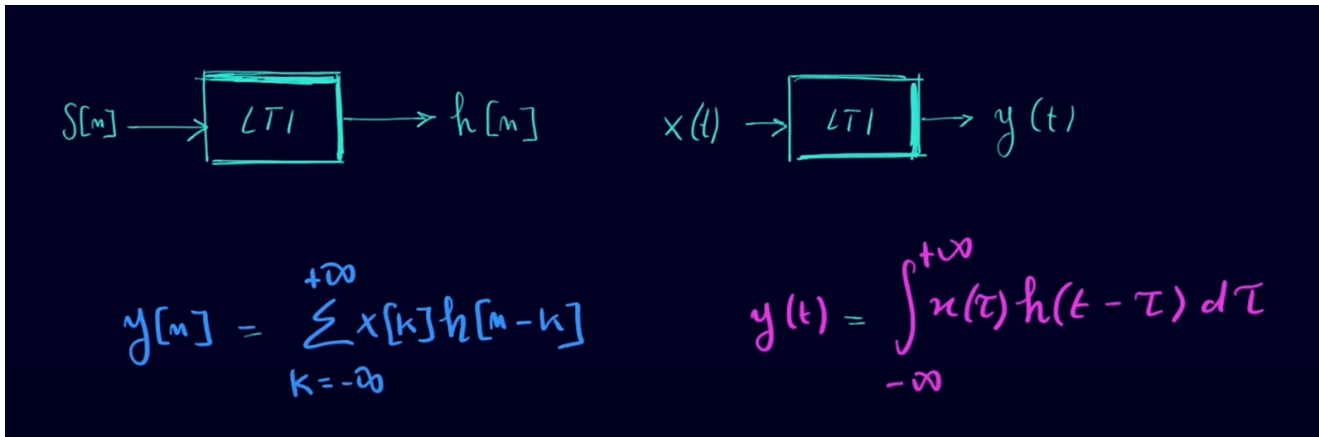
controlli automatici. impulso->risposta ad impulso. sappiamo la $G(s)$



visto che $Y = G * X \Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\{G\} * x$.

ma l'antitrasformata di $G(s)$ per controlli è proprio la risposta all'impulso $h(t)$, quindi:

" $y(t) = h(t)x(t)$ ". in realtà matematicamente è: $y(t) = (h * x)(t)$, dove "*" è il simbolo della **convoluzione**.



La convoluzione come “moltiplicazione generalizzata”

In pratica:

- nel **tempo**, il “prodotto fisico” fra un segnale di ingresso e un sistema è la **convoluzione**:

$$y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

- nel **dominio di Laplace/Fourier**, questa convoluzione **diventa un prodotto normale**:

$$Y(s) = H(s) X(s)$$

☞ Quindi, la **convoluzione è l'equivalente nel tempo** del “per” nel dominio della frequenza.

a.

● Sistemi senza memoria

Per un sistema **senza memoria**, l'uscita dipende solo dal valore istantaneo dell'ingresso:

$$y(t) = k x(t)$$

→ Qui il “**per**” (cioè la moltiplicazione punto a punto) è corretto, perché non serve ricordare nulla del passato.

● Sistemi con memoria

Per un sistema **con memoria**, l'uscita in t dipende anche da valori **passati** dell'ingresso.

In questo caso, il "per" non basta più.

Serve un'operazione che tenga conto di *tutto il passato* → la **convoluzione**:

$$y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau$$

BONUS:

metto in input e^{st} . è il mattoncino con il quale Laplace ha costruito la sua trasformata.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t - \tau)} d\tau =$$

$$\underset{h * x}{\uparrow} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{st} e^{-s\tau} d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$$= e^{st} H(s)$$

$$h * e^{st} = e^{st} H(s)$$

◆ 1. L'idea di base

La **trasformata di Laplace** è definita come:

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = \int_0^{+\infty} h(t) e^{-st} dt$$

dove:

- $t \rightarrow$ tempo (variabile reale)
- $s = \sigma + j\omega \rightarrow$ variabile complessa

Quindi:

$$e^{-st} = e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}$$

◆ 2. Significato fisico e matematico

- $e^{-\sigma t} \rightarrow$ è un **fattore di attenuazione** (decadimento o crescita esponenziale nel tempo)
- $e^{-j\omega t} \rightarrow$ è un **fattore oscillatorio** (sinusoide complessa)

👉 Insieme formano un “modo fondamentale” del sistema:

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t}$$

È una **funzione esponenziale complessa**, e Laplace serve proprio a capire **come un sistema reagisce a questo tipo di ingresso**.

◆ 3. Collegamento con la tua formula

Nella tua immagine hai:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau$$

cioè stai calcolando l'**uscita** del sistema LTI $h(t)$ quando l'ingresso è $x(t) = e^{st}$.

Separando i termini:

$$y(t) = e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

L'integrale è proprio la **trasformata di Laplace** di $h(t)$:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

quindi:

$$y(t) = H(s) e^{st}$$

◆ 4. Il senso profondo

Questo risultato dice che:

Se in ingresso metti $x(t) = e^{st}$,

l'uscita è $y(t) = H(s) e^{st}$

cioè l'esponenziale complessa è **autovalore del sistema LTI**
(con autovalore $H(s)$).

💡 Per questo la trasformata di Laplace è potentissima:
ti dice *quanto* il sistema amplifica o attenua ogni modo e^{st} .

◆ 5. In sintesi

Simbolo	Significato
e^{st}	modo esponenziale complesso di crescita/oscillazione
$s = \sigma + j\omega$	variabile complessa (parte reale = smorzamento, parte immaginaria = frequenza)
$H(s)$	risposta del sistema a quel modo
$y(t) = H(s)e^{st}$	uscita del sistema a ingresso e^{st}

👉 Quindi e^{st} è l'ingresso "di prova" che rivela la dinamica del sistema:
Laplace ti dice come il sistema risponde a ogni esponenziale possibile.

Rappresentazione del segnale con impulsi discreti

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k]$$

Cosa rappresenta

Questa non è una convoluzione, ma una **scomposizione del segnale** in impulsi unitari traslati e pesati.

Ogni termine $x[k] \delta[n - k]$ rappresenta un "pezzo" del segnale centrato in k .

Ruolo delle variabili

- $k \rightarrow$ è la **variabile di somma** (scorre tutti gli indici).
- $n \rightarrow$ è **fisso**: indica il punto del segnale in cui stai calcolando $x[n]$.

Cosa fa il delta (kroneker, non dirac nei discreti)

$$\delta[n - k] = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi, nella somma, **solo un termine sopravvive**, quello per cui $k = n$:

$$x[n] = \sum_k x[k] \delta[n - k] = x[n]$$

Perché è utile (anche se sembra banale)

Numericamente, è come dire:

$$a = a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + \dots = a$$

→ apparentemente inutile,

ma **concettualmente potentissima**: permette di vedere qualsiasi segnale come una **somma di impulsi elementari**.

Da questa identità nasce la convoluzione

Se un sistema lineare ha risposta impulsiva $h[n]$, allora per **ogni impulso** $\delta[n - k]$ risponde con $h[n - k]$.

Sostituendo la scomposizione del segnale:

$$x[n] = \sum_k x[k] \delta[n - k]$$

otteniamo la **risposta del sistema**:

$$y[n] = \sum_k x[k] h[n - k]$$

che è la **convoluzione discreta**:

$$y[n] = (x * h)[n]$$

In sintesi

- L'espressione iniziale è **banale numericamente** ma **fondamentale concettualmente**.
- Serve per costruire tutta la teoria dei **sistemi lineari tempo-invarianti (LTI)**.
- Ogni segnale può essere visto come una **somma di impulsi**, e la risposta a ciascun impulso genera la **risposta complessiva** del sistema.

Teorema di Convoluzione

Definizione di convoluzione:

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

Trasformata:

$$\mathcal{F}\{x * y\} = X(\omega) Y(\omega)$$

(E viceversa, il prodotto nel tempo corrisponde alla convoluzione in frequenza.)

Teorema della convoluzione

Definizioni. Sia $x(t)$ e $y(t)$ due segnali tempo-continui con trasformate di Fourier $X(\omega)$ e $Y(\omega)$. La **convoluzione** tra x e y è

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau.$$

Enunciato (forma “tempo→frequenza”).

$$\mathcal{F}\{x * y\}(\omega) = X(\omega) Y(\omega).$$

Cioè, una convoluzione nel dominio del tempo diventa un prodotto nel dominio delle frequenze. Vale anche il viceversa: il prodotto nel tempo diventa una convoluzione in frequenza (con costanti che dipendono dalle convenzioni usate).

Dimostrazione (sketch)

Scriviamo $y(t - \tau)$ come antitrasformata di $Y(\omega)$:

$$y(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega.$$

Sostituendo nella definizione di convoluzione ed usando Fubini (scambio d'ordine d'integrazione):

$$\begin{aligned} (x * y)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right] d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

L'ultima riga è l'antitrasformata di $X(\omega)Y(\omega)$, quindi

$$\mathcal{F}\{x * y\}(\omega) = X(\omega)Y(\omega).$$

Intuizione operativa

- Convolvere nel tempo significa “mescolare” x con copie traslate di y pesate da $x(\tau)$.
- In frequenza questo mixing diventa un semplice **prodotto punto-a-punto** degli spettri: le frequenze presenti in x vengono scalate/ruotate da Y .

Esempio classico nei sistemi LTI: se $h(t)$ è la risposta impulsiva, allora

$$y(t) = x(t) * h(t) \iff Y(\omega) = X(\omega) H(\omega).$$

Quindi progettare/analizzare un filtro è spesso più semplice in frequenza.

Proprietà utili della convoluzione

- **Commutativa:** $x * y = y * x$.
 - **Associativa:** $x * (y * z) = (x * y) * z$.
 - **Distributiva:** $x * (y + z) = x * y + x * z$.
 - **Derivazione:** $\frac{d}{dt}(x * y) = \left(\frac{dx}{dt}\right) * y = x * \left(\frac{dy}{dt}\right)$ (quando esistono le derivate).
-

Nota sulle convenzioni 2π

Le costanti 2π possono apparire nell'andata/ritorno a seconda della convenzione scelta per la trasformata:

- Convenzione "simmetrica": fattori $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ in andata e ritorno.
- Convenzione "ingegneristica" (usata sopra): nessun fattore in $\mathcal{F}\{\cdot\}$ e $\frac{1}{2\pi}$ nell'antitrasformata.

L'enunciato del teorema resta invariato **a parte** queste costanti.

Ora, noi pensiamo ai segnali nel **tempo**, ma in realtà tramite la [Trasformata di Laplace](#) possiamo riscrivere il segnale nel piano dei **complessi**. Perché? perché è molto comodo. Banalmente perché se un sistema è differenziale o con equazioni alle differenze, invece di calcolare la convoluzione possiamo spostarci nei complessi, fare il prodotto

Telecomunicazioni

Penso che questo esame l'abbiano copiato tutti, io devo ancora darlo e non ho molto intenzione di farlo. L'obbiettivo è imparare a fare gli esercizi.

Ho degli appunti fatti in parte su Google Drive, ma dovendolo ancora dare probabilmente convertirò qui in markdown.

Per il momento (fatto al 80% da ChatGPT, super incompleto): [Telecomunicazioni](#)

Riguardo al materiale

No Moodle, no Teams. solo su questo sito: web.ing.unimo.it

Il programma di esame lo trovi qui: [Programma](#)

Esame: domande di teoria + risposte multiple

- [Scenario delle telecomunicazioni e concetti fondamentali](#)
 - Scenario delle telecomunicazioni
 - Il concetto di segnale
 - Collegamenti per telecomunicazioni
- [Teoria dei segnali deterministici](#)
 - Analisi delle funzioni deterministiche tempo-continue, continue e discrete nei valori
 - Serie e trasformata di Fourier
 - Serie temporali
 - Trasformata di Fourier di una serie temporale
 - Teorema del campionamento (tempo e frequenza) e applicazioni
 - La FFT
 - L'operatore di Dirac
 - Analisi dei sistemi lineari
 - Funzione di trasferimento
 - Condizioni di non distorsione
 - Filtri e reti lineari
 - Concetto di filtro elettrico
 - Filtri ricorrenti e filtri trasversali
 - Risposta impulsiva di una rete lineare
 - Sistemi lineari tempo-discreti
 - Classi di funzioni
 - Funzioni a energia finita e a potenza finita
 - Funzioni di autocorrelazione
 - Spettri di energia e di potenza
 - Serie temporali a potenza finita
 - Segnali PAM
 - Spettro di potenza dei segnali PAM
- Teoria dei segnali aleatori
 - Processi aleatori (tempo-continui, continui e discreti nei valori) e descrizione statistica
 - Medie statistiche e medie temporali
 - Processi stazionari ed ergodici
 - Densità spettrale di potenza di un processo ergodico
 - Processi gaussiani
 - La funzione errore
 - Processi aleatori tempo-discreti, continui e discreti nei valori

- Segnali PAM aleatori
 - Spettro di potenza dei segnali PAM aleatori
- Segnali di interesse nelle telecomunicazioni
 - Segnali analogici passa-basso e relativi servizi
 - Segnali multicanale a divisione di frequenza
 - Conversione A/D e D/A
 - Segnali passa-basso numerici e relativi servizi
 - Segnali PCM
 - Segnali multicanale a divisione di tempo
 - Segnali TDM-PCM
- Collegamenti di trasmissione
 - Linee di trasmissione
 - Studio di un collegamento numerico
 - Criterio di Nyquist
 - Studio di un collegamento in fibra ottica
- Segnali passa-banda e modulazioni
 - Elementi di teoria della modulazione
 - Oscillazioni sinusoidali modulate (AM, SSB, VSB, FM, PM, QAM)
 - Caratteristiche spettrali delle modulazioni
 - Modulazioni numeriche principali: ASK, OOK, PSK, CPFSK, M-QAM
 - Diagrammi vettoriali e costellazioni degli stati
- Reti di telecomunicazioni e tecniche di commutazione
 - Topologie delle reti di telecomunicazioni
 - Tecniche di commutazione
 - Commutazione di circuito
 - Commutazione di pacchetto
- Architetture di comunicazione a strati
 - Modello ISO/OSI
 - Stack TCP/IP
 - Livello fisico: RS-232E, USB
 - Livello di linea: HDLC
- Accesso ai canali condivisi
 - Tecniche di accesso
 - Deterministiche
 - Casuali
 - Aloha e strategie CSMA
 - Valutazione delle prestazioni
 - Progetto IEEE 802
 - LAN Ethernet / IEEE 802.3

1) Dimostrare e descrivere il teorema del campionamento nel dominio dei tempi

- Fast Ethernet / 802.3u
- Token Ring
- Cenni su ADSL, WLAN